

Mécanique des milieux continus

MATH-F-426

Gregory Kozyreff

Université Libre de Bruxelles (U.L.B.)

Faculté des Sciences

Optique Non Linéaire Théorique CP 231

24 mars 2014

Avertissement Ces notes se veulent un repère mathématique pour le cours oral. Elles viennent en accompagnement du cours. Les principales sources de ce cours sont :

- ‘Applied Solid Mechanics’, P. Howell, G. Kozyreff, and J. Ockendon, Cambridge University Press 2009
- ‘Elementary Fluid Dynamics’, D. J. Acheson, Oxford University Press 1990
- ‘An Introduction to Fluid Dynamics’, G. K. Batchelor, Cambridge University Press 2000

Les notes historiques sont tirées de

- ‘A History and Philosophy of Fluid Mechanics’, G.A. Tokaty, Dover, 1994
- ‘A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity’, A. E. H. Love, Dover, 1944

© 2012, Gregory Kozyreff

Reproduction libre, sauf à des fins commerciales.

Table des matières

1	Déformations et contraintes	3
1.1	Introduction	3
1.2	Cinématique	3
1.2.1	Fluides et solides	4
1.2.2	Dérivée matérielle	5
1.3	Déformations (Strain)	6
1.4	Contraintes (Stress)	6
1.5	Tenseurs	9
1.5.1	Valeurs propres et directions principales	10
1.6	Rappels sur la notation indicielle	11
2	Lois de conservation	15
2.1	Théorème de transport	15
2.2	Masse	17
2.3	Impulsion	17
2.4	Energie	18
2.4.1	variables p et T	19
2.4.2	variables ρ et T	20
2.5	Fluides	22
2.5.1	Fluides inviscides	22
2.5.2	Fluides parfaits	22
2.5.3	Fluides newtoniens	24
2.6	Solides	25
2.6.1	Elasticité linéaire	25
2.6.2	Énergie élastique (Strain energy)	27
2.6.3	Incompressibilité	28
3	Applications des équations générales	31
3.1	Équations sous forme adimensionnelle	31
3.2	Écoulements inviscides	33
3.2.1	Vorticité	33

3.2.2	Bernoulli	34
3.2.3	Fluide compressible dans une tuyère	35
3.2.4	Vagues en eau profonde	36
3.2.5	Trainée hydrodynamique	43
3.2.6	Vagues en eau peu profonde. Ondes solitaires	46
3.2.7	Circulation atmosphérique et océanique	49
3.3	Écoulements visqueux	52
3.3.1	Équations de Stokes, Équations de Oseen	52
3.3.2	Écoulements à 2D - fonction de courant	53
3.3.3	Théorie de la lubrification	55
3.3.4	Percolation	59
3.4	Ondes élastiques	60
3.4.1	Ondes S et P	60
3.4.2	Réfraction et réflexion	61
3.4.3	Ondes de Rayleigh	62
4	Théories approchées de l'élasticité	69
4.1	Cordes et membranes	69
4.2	Poutres I	71
4.2.1	Relation $B = M \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$	73
4.3	Plaques	74
4.3.1	Couple produit par $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$	74
4.3.2	Couple produit par $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$	75
4.3.3	Couple produit par $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$	76
4.3.4	Synthèse des cas précédents	77
4.3.5	Equations d'une plaque	77
4.3.6	Conditions aux bords	78
4.3.7	Équations de von Kármán	78
4.4	Poutres II.	79
A	Etude multi-échelle	87

Chapitre 1

Déformations et contraintes

1.1 Introduction

La mécanique du point fait intervenir des masses, des ressorts et des ‘dashpots’. Si L est la longueur de référence, ℓ la longueur instantanée et T la force appliquée aux extrémités, on a, pour un ressort,

$$T = k(\ell - L) \quad (1.1)$$

et pour un frein visqueux (dashpot),

$$T = \eta \frac{d\ell}{dt}. \quad (1.2)$$

Ces lois valent pour des éléments ponctuels; il nous faut les adapter aux milieux continus. Nous verrons que L et T se généralisent par les notions de tenseurs des déformations et des contraintes. La loi de proportionnalité (1.1) fut découverte par Hooke en 1660, mais énoncée par lui bien plus tard en 1676 et 1678. Mariotte la découvrit indépendamment en 1680 et l’appliqua au problème fondateur de l’élasticité, la résistance des poutres, étudié par Galilée aux alentours de 1638; le problème fut repris par Jacques (James) Bernoulli¹, puis par Euler quelques années plus tard (voir plus loin dans le cours).

1.2 Cinématique

Un milieu continu est supposé décrit par une portion d’espace euclidien à trois dimensions. Un point matériel est donné par le vecteur position \mathbf{X} .

1. Jacques Bernoulli, 1654-1705, équation de *l’élastica*, Ch. 4, à ne pas confondre avec son neveu Daniel Bernoulli, 1700-1782, à qui est associé l’équation de Bernoulli pour les fluides non visqueux, Ch. 3.

\mathbf{X} est aussi la position initiale d'un point d'un corps déformable ; après déformation, ce point se trouve à

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t). \quad (1.3)$$

On a donc $\mathbf{x}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X}$. À noter que \mathbf{X} est une variable continue. \mathbf{X} est attaché au point matériel, c'est la variable de *Lagrange*. Si on fixe \mathbf{X} dans (1.3), on suit la trajectoire d'un point matériel au cours du temps. D'autre part, \mathbf{x} est la variable d'*Euler*. Supposons qu'on puisse inverser la relation ci-dessus et écrire

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad (1.4)$$

Dans ce cas, si l'on fixe \mathbf{x} , le point matériel \mathbf{X} associé à cette position variera généralement au cours du temps.

Exemple. *On se tient au bord de l'eau et on regarde l'eau couler sous un pont : c'est une description en variables d'Euler ; on suit du regard une feuille emportée par le courant : Lagrange.*

Rappelons enfin qu'entre les éléments de volume des deux variables existe la relation

$$d\mathbf{x} = J d\mathbf{X}, \quad (1.5)$$

où le facteur de dilatation

$$J = \left| \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) \right| \quad (1.6)$$

est supposé non nul et borné.

1.2.1 Fluides et solides

D'un point de vue mécanique, un solide se caractérise essentiellement par un champ de *déplacement*

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (1.7)$$

alors qu'un fluide se décrit plutôt par un *écoulement*²

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}. \quad (1.8)$$

Il s'agit là d'une notion intuitive et incomplète (eau dans un verre, dentifrice). Pour un fluide, la variable d'Euler est souvent la plus appropriée. Pour un solide, où les déplacements sont petits, les variables de Lagrange sont souvent

2. Dans ce cours, nous utilisons \mathbf{v} pour les vitesses, afin d'éviter la confusion avec \mathbf{u} , que nous réservons aux déplacements.

utilisées ; néanmoins, pour les très petites déformations d'un solide (élasticité linéaire), les deux descriptions sont indistingables en première approximation.

Pour visualiser un écoulement fluide, on a recours aux *lignes de courant* (anglais : streamlines). Il s'agit des courbes qui, à un instant donné, sont parallèles en tout point au vecteur vitesse. Chacune de ces courbes peut être paramétrée par $\mathbf{x} = (x(s), y(s), z(s))$, où

$$\frac{dx}{ds} = v_x, \quad \frac{dy}{ds} = v_y, \quad \frac{dz}{ds} = v_z. \quad (1.9)$$

Pour un écoulement stationnaire, les lignes de courant décrivent la trajectoire d'un paquet fluide.

1.2.2 Dérivée matérielle

Soit une fonction $f(\mathbf{x}, t)$. D'une part, on peut considérer la variation de f dans le temps en un point \mathbf{x} fixé (ex. : sous le pont), auquel cas, on calcule simplement

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t}. \quad (1.10)$$

D'autre part, on peut s'intéresser à la variation de cette grandeur à \mathbf{X} fixé, c.à.d. en suivant un point matériel ou un 'paquet fluide'. Dans ce cas, on est amené à calculer l'évolution de $f(\mathbf{x}(t), t)$, c.à.d.

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}(t + \delta t), t + \delta t) - f(\mathbf{x}(t), t)}{\delta t} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) f + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (1.11)$$

où

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = v_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (1.12)$$

Nous définissons ainsi la *dérivée matérielle* par

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) f. \quad (1.13)$$

Le premier terme de cette dérivée donne la variation de f à \mathbf{x} fixé. D'autre part, si l'on dénote par $\mathbf{s} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ la direction de la vitesse, le second terme n'est autre que la dérivée directionnelle, $|\mathbf{v}|\partial/\partial s$ dans le sens de l'écoulement. Autrement dit, c'est un terme dû au déplacement du fluide ou *d'advection*. Lorsque nous transposerons la loi de Newton à un milieu continu, nous devons calculer l'accélération d'un paquet fluide. Celle-ci sera donnée, en coordonnées d'Euler, par la dérivée matérielle de la vitesse.

1.3 Déformations (Strain)

Pour généraliser L et ℓ dans (1.1), soient les points voisins \mathbf{X} et $\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}$. Après déformation, le premier se trouve déplacé en $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$, le second en

$$\mathbf{X} + \delta\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \delta\mathbf{X} + (\delta\mathbf{X} \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \dots \quad (1.14)$$

À la variation $\delta\mathbf{X}$ correspond $\delta\mathbf{x}$ et la distance $L^2 = |\delta\mathbf{X}|^2$ devient

$$\ell^2 = |\delta\mathbf{X} + (\delta\mathbf{X} \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)|^2 \quad (1.15)$$

Aussi,

$$\ell^2 - L^2 = 2 \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{E}_{ij} \delta X_i \delta X_j = 2 \mathcal{E}_{ij} \delta X_i \delta X_j \quad (1.16)$$

où³

$$\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right). \quad (1.17)$$

Il s'agit du tenseur des déformations (anglais : strain tensor), utilisé pour décrire l'allongement relatif d'un élément solide. Nous reviendrons plus loin sur le sens du mot 'tenseur'. Dans le cas des petites déformations, on peut négliger les termes quadratiques ci-dessus ; de plus, on peut assimiler \mathbf{X} à \mathbf{x} dans l'argument de \mathbf{u} , ce qui donne le tenseur des déformations évanouissantes :

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.18)$$

La plupart du temps, s'agissant des solides, nous resterons dans le domaine de l'élasticité linéaire et nous écrirons $\mathcal{E} = (e_{ij})$.

Pour les fluides, il est plus commode d'utiliser le tenseur des *vitesse de déformation* (anglais : rate of strain)

$$v_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.19)$$

Notons que (e_{ij}) et (v_{ij}) sont tous deux symétriques et ne possèdent donc que 6 composantes indépendantes.

1.4 Contraintes (Stress)

Pour un fluide parfait, on est déjà familier (PHYS-F101) avec la notion de pression : une force par unité de surface ressentie par un petit paquet

3. À partir de maintenant, nous suivrons la convention habituelle de sommation sur les indices répétés.

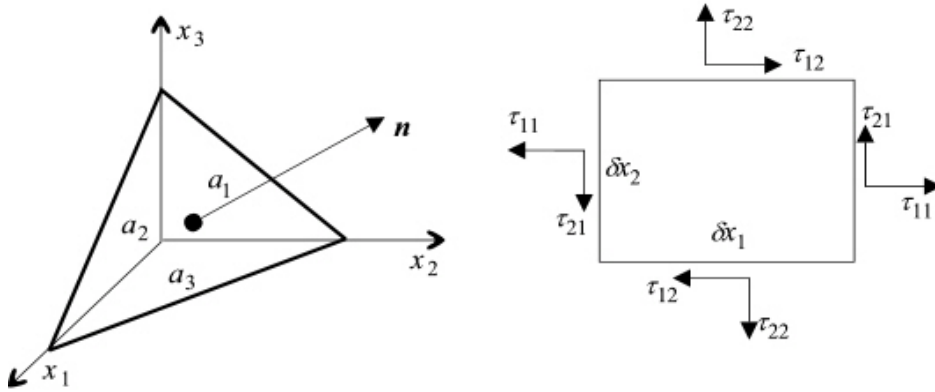


FIGURE 1.1 – Construction de Cauchy ; a_i est l'aire de la face normale à la direction x_i . Élément de surface à deux dimensions.

fluide qui est isotrope et normale à sa surface. Dans l'exemple de la Fig. 1.1, la force par unité de surface, ou *contrainte*, $\boldsymbol{\sigma}$ exercée sur la face de normale \mathbf{n} est liée à la pression p par

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{n}. \quad (1.20)$$

Par contre, dans un fluide visqueux ou un solide, la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ n'est en général pas alignée avec \mathbf{n} . Faisons le bilan des forces agissant sur le petit tétraèdre de la fig. 1.1.⁴

D'une part, sur l'élément de surface pointant dans la direction x_1 , notons la contrainte $\boldsymbol{\tau}_1 = (\tau_{11}, \tau_{21}, \tau_{31})^T$ et faisons de même pour les éléments pointant dans les directions x_2 et x_3 . Cela définit les vecteurs $\boldsymbol{\tau}_j$ ($j = 1, 2, 3$), représentant chacun la contrainte sur un élément normal à la direction x_j . On obtient donc les 9 scalaires τ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), où τ_{ij} est la composante i de $\boldsymbol{\tau}_j$, càd.

$$\boldsymbol{\tau}_j = \tau_{ij}\mathbf{e}_i, \quad (1.21)$$

où \mathbf{e}_i est le vecteur unitaire dans la direction x_i .

Sur la fig. 1.1, les éléments de surface a_1, a_2, a_3 pointent dans les directions $-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2$, et $-\mathbf{e}_3$, et sont donc soumis aux contraintes $-\boldsymbol{\tau}_1, -\boldsymbol{\tau}_2$ et $-\boldsymbol{\tau}_3$. D'autre part, étant données les composantes (n_i) de \mathbf{n} , on a $a_i = an_i$. Ainsi, la force totale sur le tétraèdre est

$$\mathbf{f} = a\boldsymbol{\sigma} - a_j\boldsymbol{\tau}_j = a(\boldsymbol{\sigma} - n_j\boldsymbol{\tau}_j). \quad (1.22)$$

4. Le raisonnement qui suit est dû à Cauchy (en 1822) et permet, après plus d'un siècle de tâtonnements, de jeter les bases d'une théorie générale de l'élasticité.

Aussi, en notant le volume par V , la densité par ρ et la vitesse par \mathbf{v} , on a

$$\rho V \frac{d\mathbf{v}}{dt} = a(\boldsymbol{\sigma} - n_j \boldsymbol{\tau}_j). \quad (1.23)$$

Faisons à présent tendre la taille du tétraèdre vers zéro. Si l est une dimension caractéristique, $V \propto l^3$ et $a \propto l^2$. Par conséquent, V tend plus vite vers zéro que a et, à la limite, en supposant que l'accélération reste finie, on trouve simplement

$$\boldsymbol{\sigma} - n_j \boldsymbol{\tau}_j = \mathbf{0}. \quad (1.24)$$

Nous en déduisons l'expression de $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\sigma_i = \tau_{ij} n_j, \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}. \quad (1.25)$$

Grâce à ce résultat, nous pouvons déduire la contrainte sur tout élément de surface à partir des 9 grandeurs $(\tau_{ij}) = \boldsymbol{\tau}$. On appelle $\boldsymbol{\tau}$ le *tenseur des contraintes*.

Considérons enfin l'élément à deux dimension dans la fig. 1.1. Par unité de longueur dans la direction x_3 , le moment des forces par rapport au centre de cet élément est

$$2(\tau_{21} \delta x_2) \frac{\delta x_1}{2} - 2(\tau_{12} \delta x_1) \frac{\delta x_2}{2}.$$

En laissant tendre les dimensions de cet élément vers zéro et en interdisant une accélération angulaire infinie, on déduit que $\tau_{12} = \tau_{21}$. L'argument se généralise directement à trois dimensions et donne

$$\tau_{ij} \equiv \tau_{ji} \quad (1.26)$$

pour tout i et j . Aussi $\boldsymbol{\tau}$ est-il un tenseur symétrique et, comme pour $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, se représente par 6 composantes indépendantes (au lieu de 9).

Notons enfin un point de vocabulaire : dans

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

τ_{11} , τ_{22} , τ_{33} sont les contraintes *normales* et τ_{12} , τ_{23} , τ_{13} sont les contraintes *tangentielles* ou *de cisaillement*.

1.5 Tenseurs

Nous avons déjà remarqué que les positions étaient classiquement décrites par des vecteurs dans un espace euclidien à trois dimensions, muni du produit scalaire habituel. Il en va de même pour les forces, les vitesses et les accélérations. Venons-en à la définition d'un tenseur (du deuxième ordre).

Un tenseur du deuxième ordre est une application linéaire qui transforme un vecteur en un autre vecteur du même espace.

On voit d'après (1.25) que le tenseur des contraintes τ répond bien à cette définition : à chaque direction \mathbf{n} , il associe une contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ et ce, par le biais d'une transformation linéaire.

La représentation d'un vecteur, ses coordonnées, varient selon la base orthonormée choisie. On a par exemple, pour les vecteurs contrainte et normale d'un élément de surface,

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_i \mathbf{e}_i = \sigma'_k \mathbf{e}'_k \quad \text{et} \quad \mathbf{n} = n_j \mathbf{e}_j = n'_\ell \mathbf{e}'_\ell, \quad (1.28)$$

où $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ et $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ sont deux bases orthonormées. Entre les deux représentations d'un vecteur, on a (en utilisant la convention de sommation)

$$\sigma'_k = \mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}_i \sigma_i \equiv P_{ki} \sigma_i. \quad (1.29)$$

Ci-dessus, $(P_{ki}) = (\mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}_i)$ est la matrice de transformation entre les axes définis par les deux bases. Quant au tenseur de contraintes, les nombres τ_{ij} apparaissant dans (1.25) sont la représentation de τ dans une base donnée. Voyons comment se transforme cette représentation par un changement de base. Quelle que soit la base, on a $\boldsymbol{\sigma} = \tau \mathbf{n}$; cela donne, d'une part, $\sigma_i = \tau_{ij} n_j$. Or, par (1.28), $n_j = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_\ell n'_\ell = P_{\ell j} n'_\ell$, donc

$$\sigma_i = \tau_{ij} P_{\ell j} n'_\ell. \quad (1.30)$$

D'autre part, en utilisant (1.29), on a

$$\sigma'_k = P_{ki} \tau_{ij} P_{\ell j} n'_\ell = (P_{ki} P_{\ell j} \tau_{ij}) n'_\ell \quad (1.31)$$

mais la dernière relation s'écrit aussi $\sigma'_k = \tau'_{k\ell} n'_\ell$. Ainsi, entre les deux représentations du tenseur τ , on a

$$\boxed{\tau'_{k\ell} = P_{ki} P_{\ell j} \tau_{ij}.} \quad (1.32)$$

Cette relation, très importante, permet de reconnaître un tenseur du deuxième ordre. Elle peut aussi servir de définition équivalente d'un tenseur :

Un tenseur du deuxième ordre est un ensemble de 9 nombres qui se transforment par un changement de base selon la formule (1.32).

Cette seconde définition a l'avantage de se généraliser facilement. Un tenseur d'ordre n est un ensemble de 3^n nombres $A_{ijk\dots}$ (n indices) qui se transforment par un changement de base selon la formule $A'_{mno\dots} = P_{mi}P_{nj}P_{ok}\dots A_{ijk\dots}$. La formule fait intervenir la matrice $(P_{\alpha\beta})$ autant de fois qu'il y a d'indices et, bien sûr, la convention de sommation sur les indices répétés est sous-entendue.

On vérifiera à titre d'exercice que les éléments du tenseur de déformation \mathcal{E} se transforment bien selon la règle ci-dessus.

Note : Jusqu'à présent, nous avons utilisé les symboles \mathcal{E} et τ pour désigner les tenseurs de déformations et de contraintes. Dans la suite, et par un léger abus de notation, nous utiliserons \mathcal{E} aussi pour désigner la matrice (e_{ij}) . Dans ce cas \mathcal{E}' désignera la matrice (e'_{ij}) dans un nouveau repère. L'abus de notation vient du fait qu'alors, \mathcal{E} et \mathcal{E}' désignent deux représentations d'un même tenseur : \mathcal{E} . Même commentaire pour τ .

1.5.1 Valeurs propres et directions principales

Nous avons remarqué que les matrices (τ_{ij}) et (e_{ij}) étaient symétriques. Rappel (MATH-F-101) : les valeurs propres d'une matrice symétrique sont réelles et ses vecteurs propres forment une base orthonormée. Ces vecteurs propres déterminent les *directions principales*. Représentés dans leurs bases orthonormées respectives, les tenseurs des déformations et des contraintes sont

$$\mathcal{E}' = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad \tau' = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

Et leurs valeurs propres $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$, $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$, sont respectivement appelées *élongations* et *contraintes principales*.

Considérons par exemple le *cisaillement* (anglais : shear) donné par

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \alpha y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.34)$$

Il y correspond

$$\mathcal{E} = \frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

Les directions principales sont

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

et les élongations principales sont $\varepsilon_1 = \alpha/2$, $\varepsilon_2 = -\alpha/2$, $\varepsilon_3 = 0$. On voit donc qu'un déplacement de cisaillement est équivalent à une expansion combinée avec une contraction d'égales amplitudes dans les deux directions à 45° de $(1, 0, 0)^T$.

Enfin, à deux dimensions, considérons l'état de contrainte donné par

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

Tournons les axes de référence par rapport aux directions principales d'un angle θ . On trouve (exercice) que, dans le nouveau repère,

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \cos^2 \theta + \tau_2 \sin^2 \theta & (\tau_1 - \tau_2) \sin \theta \cos \theta \\ (\tau_1 - \tau_2) \sin \theta \cos \theta & \tau_2 \cos^2 \theta + \tau_1 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

On voit ainsi que la contrainte de cisaillement est la plus importante à 45° des directions principales et qu'elle vaut $|\tau_1 - \tau_2|/2$. C'est important à savoir, car ce sont souvent les contraintes de cisaillement qui sont les plus dangereuses (penser à un paquet de cartes).

Note : Les tenseurs \mathcal{E} et τ dépendent généralement de l'espace ; on devrait donc parler de champs de tenseurs. Par conséquent, aussi bien les directions principales que les contraintes principales varient d'un point à l'autre.

1.6 Rappels sur la notation indicielle

- Le symbole d'un indice répété est libre : $A_{ijk\dots}B_{pqk\dots} = A_{ij\zeta\dots}B_{pq\zeta\dots}$
- Une lettre en indice ne peut apparaître plus de deux fois : $A_{ik}B_{jk}C_{kk}$ est une expression incorrecte. Une expression correcte pourrait être $A_{ik}B_{jk}C_{ll}$ ou $A_{il}B_{jk}C_{lk}$ ou $A_{ik}B_{jl}C_{lk}$ et dans tous les cas, la sommation à la fois sur k et sur l est sous-entendue.
- Kronecker :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Exemple : $\delta_{11} = 1$, $\delta_{kk} = 3$, $\delta_{k3}\partial/\partial x_k = \partial/\partial x_3$.

– Le symbole

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i, j, k\} \text{ est une permutation paire de } \{1, 2, 3\} \\ -1 & \text{si } \{i, j, k\} \text{ est une permutation impaire de } \{1, 2, 3\} \\ 0 & \text{si deux indices sont identiques.} \end{cases}$$

– Il est utile pour calculer produits vectoriels et rotationnels :

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k,$$

$$\nabla \times \mathbf{u} = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} u_k.$$

– pour manipuler des produits vectoriels croisés, la relation suivante est très utile :

$$\varepsilon_{pqr} \varepsilon_{pst} = \delta_{qs} \delta_{rt} - \delta_{qt} \delta_{rs}. \quad (\text{à vérifier}) \quad (1.39)$$

– Formule du déterminant :

$$\det(a_{ij}) = \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}. \quad (1.40)$$

Exercices

- 1.1 Montrez que dans la figure 1.1, $a_i = n_i a$.
- 1.2 (a) Montrer que \mathcal{E} obéit à (1.32) sans utiliser la définition (1.17), ni (1.18).
- (b) Même exercice en partant cette fois de la définition de $\mathcal{E} = (e_{ij})$ en (1.18).
- 1.3 Montrez que le tenseur linéarisé (e_{ij}) , donné par (1.18), est nul ssi $\mathbf{u} = \mathbf{c} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$, où \mathbf{c} et $\boldsymbol{\omega}$ sont des vecteurs indépendants de l'espace. Montrez qu'il s'agit d'une approximation d'un mouvement de corps rigide (voir Ch. 3, rel A-4, Phys-F-101 (mécanique)), pour un petit angle de rotation.
- 1.4 Montrez que le tenseur de déformation en coordonnées polaires à 2D est donné par

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad 2e_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right). \quad (1.41)$$

- (a) Méthode 1 : Utilisez le changement de variable $u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta$ et la formule de changement de base (1.32).
- (b) Méthode 2 : Utilisez directement (1.16) en considérant la déformation d'un élément joignant deux points de coordonnées polaires (r, θ) et $(r + \delta r, \theta + \delta \theta)$, càd

$$\delta \mathbf{X} \sim \delta r \mathbf{e}_r + r \delta \theta \mathbf{e}_\theta.$$

En supposant le champ de déplacement $\mathbf{u} = u_r(r, \theta) \mathbf{e}_r(\theta) + u_\theta(r, \theta) \mathbf{e}_\theta(\theta)$, déduisez que

$$\delta \mathbf{x} = \delta \mathbf{X} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \delta r + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \delta \theta - u_\theta \delta \theta \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \delta r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \delta \theta + u_r \delta \theta \right) \mathbf{e}_\theta.$$

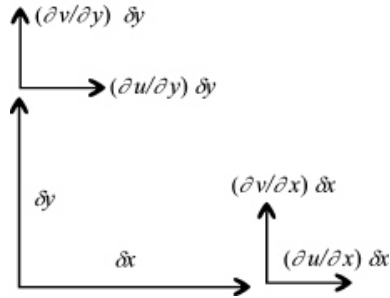
et donc que

$$|\delta \mathbf{x}|^2 = |\delta \mathbf{X}|^2 + (\delta r \quad r \delta \theta) \begin{pmatrix} e_{rr} & e_{r\theta} \\ e_{r\theta} & e_{\theta\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r \\ r \delta \theta \end{pmatrix}$$

avec, au premier ordre, (1.41)

- 1.5 Nous verrons que les vagues de faible amplitude en haute mer peuvent s'écrire sous la forme potentielle $\mathbf{v} = \nabla \phi$, où $\phi = A e^{ky} \sin(kx - \omega t)$. Calculez et dessinez les trajectoires des paquets fluides au passage de ces vagues. (On pourra linéariser les équations autour d'une position moyenne en supposant $A \ll 1$).

- 1.6 Soit le champ de déplacement $u_x = u_y = f(\sqrt{x^2 + y^2})$. Calculer \mathcal{E} en coordonnées cartésiennes et polaires.
- 1.7 L'écoulement dans l'EX 5 est *irrotationnel*. Un écoulement rotationnel possède une *vorticité* $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} \neq$ non nulle. À 2D, interprétez le sens de $\boldsymbol{\omega}$ et de $\text{div } \mathbf{v}$ sur un élément fluide de dimensions infinitésimales (dessin).



- 1.8 Calculez le rotationnel d'un écoulement de Poiseuille plan $\mathbf{v} = Uy(h - y)\mathbf{e}_x$, du tourbillon (vortex line) $\mathbf{v}_\theta = \frac{k}{r}\mathbf{e}_\theta$ et du tourbillon de Rankine,

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_\theta \begin{cases} \Omega r & r < a, \\ \Omega \frac{a^2}{r} & r > a. \end{cases}$$

- 1.9 Démontrez les identités suivantes en utilisant la notation indicielle
- (a) $\text{div}(f\mathbf{a}) = f \text{div } \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \text{grad } f$
- (b) $\text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \text{div } \mathbf{b} - \mathbf{b} \text{div } \mathbf{a} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b}$
- 1.10 Montrez que

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J \text{div } \mathbf{v}.$$

Chapitre 2

Lois de conservation et relations constitutives

2.1 Théorème de transport

Intéressons-nous à l'évolution d'une quantité associée à une portion donnée de matière, fluide ou solide, au cours du temps

$$Q(t) = \iiint_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}. \quad (2.1)$$

La difficulté vient du fait que le volume V est fonction du temps ainsi que, par conséquent, la paramétrisation utilisée pour effectuer l'intégration. Rappelons-nous du théorème de Leibniz pour la dérivée d'une intégrale à 1D :

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) \, dx \right] = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \, dx + f(b, t) \frac{db}{dt} - f(a, t) \frac{da}{dt}. \quad (2.2)$$

Cela se généralise simplement par

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint_{V(t)} \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \, d\mathbf{x} + \iint_{\partial V(t)} f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, da, \quad (2.3)$$

et, par application du théorème de la divergence, on obtient le *théorème de transport* :

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint_{V(t)} \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} (f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}) \right) \, d\mathbf{x}. \quad (2.4)$$

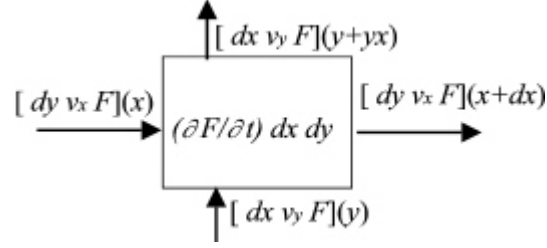


FIGURE 2.1 – Bilan à 2D : $\frac{\partial F}{\partial t} dx dy = [dy v_x F](x + dx) + [dx v_y F](y + dy) - [dy v_x F](x) - [dx v_y F](y) + S dx dy$.

En supposant l'existence d'un terme de source tel que dQ/dt puisse aussi s'écrire $\iiint_{V(t)} S d\mathbf{x}$, on obtient l'expression locale

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(f(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}) = S. \quad (2.5)$$

Cette forme de bilan s'obtient aussi aisément en considérant un élément de volume infinitésimal (Fig. 2.1). Une autre manière de procéder est d'écrire

$$\iiint_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \iiint_{V(0)} F(\mathbf{X}, t) J d\mathbf{X}, \quad (2.6)$$

de sorte que

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint_{V(0)} \left(\frac{\partial F(\mathbf{X}, t)}{\partial t} J + F(\mathbf{X}, t) \frac{\partial J}{\partial t} \right) d\mathbf{X} \quad (2.7)$$

$$\stackrel{(\text{ex. 1.10})}{=} \iiint_{V(0)} \left(\frac{\partial F(\mathbf{X}, t)}{\partial t} + F(\mathbf{X}, t) \operatorname{div} \mathbf{v} \right) J d\mathbf{X} \quad (2.8)$$

$$= \iiint_{V(t)} \left(\frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div} \mathbf{v} \right) d\mathbf{x} \quad (2.9)$$

$$= \iiint_{V(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f\mathbf{v}) \right) d\mathbf{x} \quad (2.10)$$

2.2 Masse

Soit $f = \rho$, la densité, dans (2.5). En l'absence de source, la conservation de la masse s'écrit ¹

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.} \quad (2.11)$$

De manière équivalente, exprimons la masse contenue dans un volume donné :

$$M = \iiint_{V(t)} \rho \, d\mathbf{x} = \iiint_{V(0)} \rho J \, d\mathbf{X}. \quad (2.12)$$

Par conservation, cette masse est aussi

$$M = \iiint_{V(0)} \rho_0 \, d\mathbf{X}, \quad (2.13)$$

où ρ_0 est la densité initiale. Les deux expressions sont égales et cela, indépendamment du volume $V(0)$ choisi. Donc,

$$\rho J = \text{const} = \rho_0, \quad (2.14)$$

une formule bien utile pour la suite.

2.3 Impulsion

Supposons qu'il existe une force de volume $\rho \mathbf{g}$ (p. ex, gravité). La loi de Newton appliquée à un volume de matière donné s'exprime :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} v_i \rho \, d\mathbf{x} = \iint_{\partial V(t)} \tau_{ij} n_j \, da + \iiint_{V(t)} g_i \rho \, d\mathbf{x}. \quad (2.15)$$

Pour développer le membre de gauche, on peut soit utiliser (2.5) et (2.11), soit écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} v_i \rho \, d\mathbf{x} &= \frac{d}{dt} \iiint_{V(0)} v_i \rho J \, d\mathbf{X} \stackrel{(2.14)}{=} \iiint_{V(0)} \frac{\partial v_i}{\partial t} \rho J \, d\mathbf{X} \\ &= \iiint_{V(t)} \frac{Dv_i}{Dt} \rho \, d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.16)$$

1. Léonard de Vinci (1452-1519) observait déjà que pour un fluide, $VA = \text{const.}$, V étant la vitesse du fluide et A sa section transverse. Aujourd'hui, on écrit cela $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$.

L'équation de conservation du moment s'exprime donc par

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}. \quad (2.17)$$

Nous pouvons enfin écrire cette équation sous forme vectorielle, en introduisant la notation de divergence d'un tenseur :

$$(\nabla \cdot \tau)_i = \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}. \quad (2.18)$$

Comme τ est symétrique, on a

$$\boxed{\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \tau.} \quad (2.19)$$

2.4 Energie

Soit ρq la chaleur par unité de volume d'un paquet fluide. Par le même raisonnement que pour l'impulsion, le bilan d'énergie prend la forme générale

$$\rho \frac{Dq}{Dt} = r - \text{div } j, \quad (2.20)$$

où r est un terme de source et j est un flux. r peut être dû à des forces de friction ou résulter d'une réaction chimique. D'autre part, j est souvent modélisé par la loi de Fourier :

$$j = -k_H \nabla T. \quad (2.21)$$

Ceci est valable pour le transport de chaleur par conduction. Dans certains cas, cela n'est pas le mode de transport dominant. Dans certains cas, le transport se fait principalement par rayonnement et il est dit 'radiatif'. C'est le cas, à l'intérieur des étoiles, dans la matière en fusion comme la lave ou encore le verre en fusion. De même, ce mode de transport est important dans l'atmosphère terrestre. La description d'un tel transport est compliqué mais elle se simplifie dans la limite où le milieu est épais par rapport à la longueur caractéristique d'absorption d'un photon. Dans ce cas, on peut invoquer *l'approximation de Rosseland* :

$$j = \frac{-16\sigma}{3\alpha_R} T^3 \nabla T, \quad (2.22)$$

où σ est la constante de Stefan de la théorie des corps noirs et α_R est un coefficient d'absorption moyen.

Il nous faut à présent exprimer q , dans (2.20) en termes de quantités utiles, càd T et p ou bien T et ρ . Pour ce faire, nous invoquons le premier principe de thermodynamique²

$$de = T ds - p dv, \quad (2.23)$$

où e , s et v sont l'énergie interne, l'entropie et le volume par unité de masse (donc $v = 1/\rho$; ce n'est pas le module de la vitesse, ici). Ci dessus, $T ds$ est la variation de chaleur. Nous avons donc

$$\frac{Dq}{Dt} = T \frac{Ds}{Dt}. \quad (2.24)$$

Les grandeur p , ρ et T sont liées par une équation d'état. On peut donc développer l'expression de s en termes de p et T , ou bien de ρ et T .

2.4.1 variables p et T

Si l'on adopte comme variables indépendantes p et T , on exprime l'entropie sous la forme $s = s(p, T)$. Ainsi, la variation de chaleur s'écrit

$$T ds = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p dT + T \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T dp = c_p dT + T \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T dp, \quad (2.25)$$

où c_p dénote la variation de chaleur par unité de masse par élévation de température à pression constante. Il s'agit de la chaleur spécifique (par unité de masse) à pression constante, qui est une grandeur expérimentalement accessible. Le dernier terme s'obtient par une relation de Maxwell. Considérons à cet effet l'énergie libre de Gibbs :

$$d(e - Ts + pv) = dg = -s dT + v dp. \quad (2.26)$$

Cette expression montre que $-s$ et v sont des dérivées partielles de $g(T, p)$. Ainsi, par différentiation croisée, on obtient

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p. \quad (2.27)$$

Ci-dessus, le membre de droite fait apparaître la fonction réponse α , qui est l'accroissement relatif de volume à pression constante suite à une élévation de température :

$$\alpha = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p. \quad (2.28)$$

2. Il faudrait en fait plutôt écrire $de = T ds + \rho_0^{-1} \tau_{ij} d\mathcal{E}_{ij}$ mais nous supposons ici pour simplifier que les contraintes se réduisent à p . Un traitement plus complet est donné dans Landau et Lifshitz, *Theory of Elasticity*.

Ainsi,

$$T ds = c_p dT - \alpha T v dp = c_p dT - \frac{\alpha T}{\rho} dp. \quad (2.29)$$

Par conséquent, (2.20) peut s'écrire

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} - \alpha T \frac{Dp}{Dt} = r - \operatorname{div} j. \quad (2.30)$$

Pour un gaz parfait, $pV = nRT$ et on trouve facilement que $\alpha = 1/T$. Dans ce cas, et en supposant un transport classique de type Fourier, on a

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + r + k_H \nabla^2 T. \quad (2.31)$$

2.4.2 variables ρ et T

Si on considère s comme une fonction de v et T , alors la variation de chaleur s'écrit

$$T ds = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_v dT + T \left(\frac{\partial s}{\partial v} \right)_T dv = c_v dT + T \left(\frac{\partial s}{\partial v} \right)_T dv. \quad (2.32)$$

Pour calculer le dernier terme, on utilise cette fois l'énergie libre de Helmholtz :

$$d(e - Ts) = df = -s dT - p dv, \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\partial s}{\partial v} \right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v. \quad (2.33)$$

Ensuite, considérons la différentielle de $p(v, T)$:

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T dv + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dT. \quad (2.34)$$

Ainsi, si p reste constant, c'est-à-dire si $dp = 0$, l'expression ci-dessus nous fournit un équation pour $\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v$. On a, en effet,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = - \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \frac{dv}{dT} = - \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p. \quad (2.35)$$

Dans le membre de droite, nous avons

$$- \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T = - \frac{1}{\left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T}. \quad (2.36)$$

La variation de volume par élévation de pression à température constante est une fonction de réponse courante en thermodynamique, et l'on note

$$\kappa_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T. \quad (2.37)$$

Nous obtenons donc

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = \frac{\alpha}{\kappa_T}, \quad \rightarrow \quad T \left(\frac{\partial s}{\partial v} \right)_T = \frac{\alpha T}{\kappa_T}. \quad (2.38)$$

Ainsi (2.32) devient

$$T ds = c_v dT + \frac{\alpha T}{\kappa_T} dv, \quad (2.39)$$

où n'apparaissent plus que des fonctions réponse usuelles. Une dernière manipulation est possible. En comparant (2.29) et (2.39), on trouve

$$(c_p - c_v) dT = \alpha T \left(\frac{1}{\kappa_T} dv + v dp \right). \quad (2.40)$$

Or, v , p et T étant reliés par une équation d'état, on a $v = v(p, T)$ et donc

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dT = v (-\kappa_T dp + \alpha dT). \quad (2.41)$$

En substituant cette relation dans l'équation précédente, on obtient une formule thermodynamique connue

$$c_p - c_v = \frac{\alpha^2 v T}{\kappa_T} \quad (2.42)$$

et finalement

$$T ds = c_v dT + \frac{c_p - c_v}{\alpha} \frac{dv}{v}, \quad (2.43)$$

$$= c_v dT - \frac{c_p - c_v}{\alpha} \frac{d\rho}{\rho}. \quad (2.44)$$

L'équation de conservation de l'énergie devient donc

$$\rho \left(c_v \frac{DT}{Dt} - \frac{c_p - c_v}{\alpha \rho} \frac{D\rho}{Dt} \right) = \rho \left(c_v \frac{DT}{Dt} + \frac{c_p - c_v}{\alpha} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) = r - \operatorname{div} j. \quad (2.45)$$

Si le milieu est incompressible, l'expression se réduit à

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = r - \operatorname{div} j. \quad (2.46)$$

2.5 Fluides

Pour compléter la modélisation mathématique, il faut spécifier la relation qui lie les contraintes aux déplacements, c.à.d. les relations constitutives du milieu continu considéré. Voici les cas les plus courants.

2.5.1 Fluides inviscides

Supposons, comme dans Phys-F-101, que

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad (2.47)$$

où p est la pression. En dehors des forces de volume, \mathbf{g} , ce sont les différences de pression qui produisent le mouvement. Les équations du mouvement sont donc

$$\boxed{\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho\mathbf{g} - \nabla p, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0.} \quad (2.48)$$

Ce sont les équations d'Euler.³ On remarque immédiatement qu'on ne dispose que de 4 équations pour 5 inconnues. Il faut donc compléter ce système par une équation supplémentaire, généralement sous la forme d'une équation d'état $\rho = \rho(p)$.

Si le fluide est un gaz parfait subissant des transformations isentropiques, on a

$$p\rho^{-\gamma} = \text{const.} \quad (2.49)$$

(voir exercices) Pour l'air, on suppose généralement que $\gamma = 1.4$.

Dans le cas de la convection thermique d'un liquide, on a plutôt $\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))$ et les équations (2.48) sont alors couplées à une équation de transport de chaleur : $\frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T$.

Nous utiliserons les équations ci-dessus pour modéliser les ondes acoustiques.

2.5.2 Fluides parfaits

Lorsqu'un fluide inviscide est aussi incompressible, on a $\rho = \text{const.}$ et

$$\boxed{\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho\mathbf{g} - \nabla p, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.} \quad (2.50)$$

3. Ces équations furent dérivées sous cette forme par Euler (1707-1783). Elles marquent un tournant dans l'histoire de la mécanique des fluides car elle forment pour la première fois une base mathématique complète de la théorie des fluides. Comme le remarqua Lagrange, ces équations réduisent l'étude de la mécanique des fluides à un problème d'analyse. Jusqu'alors, les problèmes d'hydrauliques se posaient et se résolvaient au cas par cas, par la force de l'intuition de savants comme Daniel Bernoulli.

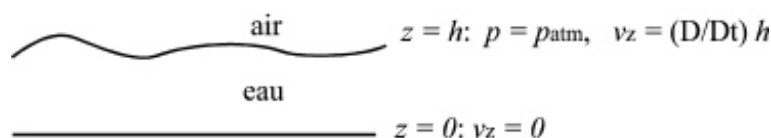


FIGURE 2.2 – exemple de conditions aux bords pour un fluide inviscide.

Le modèle du fluide parfait est très utilisé en hydrodynamique et est approprié pour un très grand nombre d'écoulements. Nous l'utiliserons pour décrire la poussée aérodynamique et les vagues. Ce modèle est aussi souvent valable loin de parois rigides.

Conditions aux limites

Les équations énoncées plus haut n'ont de sens qu'une fois les conditions aux bords précisées. Celles-ci sont dictées par la physique du problème, cf. exemples plus loin. Concernant \mathbf{v} , on supposera toujours que

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.51)$$

sur une paroi fixe de l'écoulement, càd. que le fluide ne peut traverser la paroi. Par contre, la vitesse tangentielle est libre : le fluide peut glisser le long d'une paroi.

D'autre part, si le fluide est délimité par une surface libre $z = h$, par exemple, l'interface air/eau, on y aura

$$p = p_{\text{atm}}, \quad v_z = \frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y}. \quad (2.52)$$

La seconde relation est appelée condition cinématique. Elle exprime qu'un paquet fluide à la surface de l'eau s'élève passivement par l'augmentation de h , d'une part, et aussi en se déplaçant le long de h , d'autre part. Ces conditions sont résumées sur la figure 2.2

De plus, (2.50) étant du premier ordre en t , on s'attend à devoir spécifier \mathbf{v} à l'instant initial.

Note : En réalité, un fluide ne peut presque jamais 'glisser' le long d'une paroi : sa vitesse relative s'y annule complètement. Cette annulation totale de la vitesse se produit souvent sur des distances très courtes, à l'intérieur d'une *couche limite*. Pour décrire ce phénomène, le modèle du fluide inviscide doit être complété par l'introduction de la *viscosité*. Il arrive souvent, cependant,

que les effets de viscosité restent négligeables en dehors de ces couches limites et que les modèles (2.48) et (2.50) restent très bons pour décrire la majeure partie de l'écoulement.

2.5.3 Fluides newtoniens

Supposons plus généralement qu'il existe une relation linéaire instantanée $\tau_{ij} = A_{ijkl}v_{ij}$ entre les tenseurs des contraintes et des vitesses de déformation. Dans cette relation, A_{ijkl} est un tenseur d'ordre 4. Notons immédiatement que, par symétrie de (τ_{ij}) et (v_{ij}) , $A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk}$. Si, en outre, on suppose le milieu isotrope, alors on obtient la même relation

$$\tau'_{ij} = A_{ijkl}v'_{ij} \quad (2.53)$$

dans tous les repères orthonormés obtenus à partir du premier, par rotation ou inversion d'axes. Autrement dit, $A_{ijkl} = P_{im}P_{jn}P_{ko}P_{lp}A_{mnop}$ pour toute matrice P de changement de repère. Ces conditions réduisent fortement le nombre d'éléments non nuls dans A . En fin de compte, seules deux constantes indépendantes subsistent et l'on obtient la relation constitutive d'un fluide newtonien

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu v_{ij} + \lambda(v_{kk})\delta_{ij}, \quad (2.54)$$

$$= -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \operatorname{div}(\mathbf{v})\delta_{ij}. \quad (2.55)$$

Dans celle-ci, μ est le coefficient de *viscosité dynamique* et λ est le coefficient de viscosité *de volume*. On se souvient (Phys-F-101, Eq. 8-24) qu'un gradient de vitesse s'accompagne généralement d'une contrainte tangentielle. Exemple : $\mathbf{v} = U(y/h, 0, 0)$, $\tau_{xy} = \mu U/h^4$.

Pour des variations de température modérées, ces coefficients sont constants. L'approximation n'est pas toujours valable, ex. : géophysique/lave, industrie/verre en fusion.

Si on suppose que le fluide est incompressible, on peut négliger λ . D'autre part, alors que μ varie beaucoup d'un fluide à l'autre (air, eau), on remarque que le rapport μ/ρ varie dans une bien moindre mesure. On appelle $\nu = \mu/\rho$ la *viscosité cinématique*. Dans des conditions standards, $\mu_{\text{eau}} \approx 10^{-3} \text{Pa s}$, $\mu_{\text{air}} \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{Pa s}$, $\nu_{\text{eau}} \approx 1 \text{m}^2 \text{s}^{-1}$, $\nu_{\text{air}} = 15 \text{m}^2 \text{s}^{-1}$.

4. Newton (1642-1727) avait émis l'hypothèse d'une force de friction par unité de surface entre deux couches de fluide glissant l'une sur l'autre. Il a supposé que cette contrainte tangentielle serait proportionnelle à dv/dy , y étant la coordonnée normale aux couches fluides.

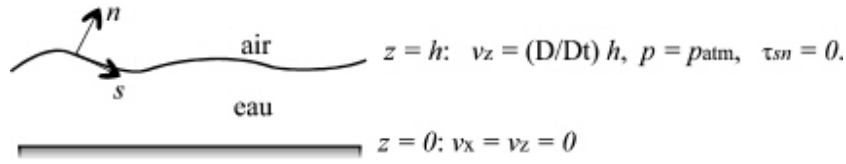


FIGURE 2.3 – exemple de conditions aux bord pour un fluide inviscide.

On vérifie aisément que, pour un fluide newtonien incompressible, on a les équations de Navier-Stokes^{5 6}

$$\boxed{\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0.} \quad (2.56)$$

Conditions aux limites

Eq. (2.56) contient des dérivées d'ordre plus élevé dans les variables d'espace que dans les modèles inviscides. Il faut donc généralement spécifier davantage de conditions aux bords. Sur une paroi immobile, on aura,

$$\mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (2.57)$$

Par ailleurs, sur une surface libre, on aura,

$$\boldsymbol{\tau} \mathbf{n} = \mathbf{f}_{\text{ext}}, \quad (2.58)$$

où \mathbf{f}_{ext} est la contrainte mécanique de l'extérieur sur le fluide. Notons que l'«extérieur» est généralement un autre fluide : $\mathbf{f}_{\text{ext}} = \tau^{(\text{ext})} \mathbf{n}$. Dans le cas eau/air, on a, en très bonne approximation : $\tau^{(\text{ext})} \mathbf{n} = -p_{\text{atm}} \mathbf{n}$. La figure 2.3 illustre cette discussion.

2.6 Solides

2.6.1 Elasticité linéaire

Le pendant de (2.54) pour un solide élastique est la relation constitutive

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda(e_{kk}) \delta_{ij}, \quad (2.59)$$

5. Proposé par Louis Navier (1785-1836) en 1822 et dérivé sous une autre forme par George Gabriel Stokes (1819-1903) en 1845.

6. Il est très important de se souvenir que la définition du laplacien vectoriel est $\nabla^2 = \text{grad div} - \text{rot rot}$ et que la relation $\nabla^2(v_x, v_y, v_z) = (\nabla^2 v_x, \nabla^2 v_y, \nabla^2 v_z)$ n'est vraie que dans un repère cartésien.

où λ et μ sont les *constantes de Lamé*. Certaines combinaisons de ces deux constantes ont des significations particulières et des noms propres.

1. Soit un état de cisaillement simple : $\mathbf{u} = \alpha(y, 0, 0)$. On calcule immédiatement que $\tau_{xy} = \mu\alpha$, les autres composantes de τ étant nulles. Par conséquent, on appelle μ le *module de cisaillement* (angl. : shear modulus).
2. Soit ensuite l'expansion $\mathbf{u} = (\alpha/3)(x, y, z)$. Il y correspond l'accroissement relatif de volume $\text{div } \mathbf{u} = \alpha$. Par ailleurs, $\tau_{ij} = (2\mu/3 + \lambda)\alpha \delta_{ij}$. On appelle donc le *module de compression*, $K = 2\mu/3 + \lambda$.
3. Cherchons à présent le champ de déplacement correspondant à un état de contrainte *uniaxial* :

$$\tau_{ij} = \tau_{xx} \delta_{i1} \delta_{j1}.$$

La seule composante non nulle de τ est donc τ_{xx} . Cela correspond à l'expérience courante de tirer sur une barre dans le sens de la longueur, par ses extrémités en laissant les faces latérales libres. Comme les contraintes de cisaillement sont toutes nulles, on a $\mathbf{u} = (\varepsilon_{xx}x, \varepsilon_{yy}y, \varepsilon_{zz}z)$. De plus, en faisant $\tau_{yy} = \tau_{zz} = 0$, on trouve

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\frac{\lambda}{2\mu + 2\lambda} \varepsilon_{xx} = -\nu \varepsilon_{xx}, \quad (2.60)$$

ce qui définit le *coefficient de Poisson* (Poisson ratio) $\nu = \frac{\lambda}{2\mu + 2\lambda}$. La plupart du temps (mais pas toujours), $\nu > 0$, ce qui signifie que l'extension uniforme d'un solide dans une direction s'accompagne d'une contraction dans les directions transverses. Enfin, une dernière application de (2.59) donne

$$\tau_{xx} = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda} \varepsilon_{xx} = E \varepsilon_{xx}. \quad (2.61)$$

Cela fait apparaître le *module de Young* $E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda}$. Fréquemment, on choisit d'utiliser E et ν plutôt que λ et μ , car cela occasionne des économies d'écritures. ν a en outre l'avantage d'être sans dimension. Les deux relations précédentes s'inversent aisément :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (2.62)$$

et l'on note la contrainte physique $-1 < \nu < 1/2$. La relation (2.59) s'écrit aussi

$$\tau_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \left(e_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (e_{kk}) \delta_{ij} \right), \quad (2.63)$$

et surtout, son inverse s'écrit sous la forme économique

$$Ee_{ij} = (1 + \nu) \tau_{ij} - \nu(\tau_{kk}) \delta_{ij}. \quad (2.64)$$

Introduisons à présent (2.59) dans (2.17). On obtient

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho g_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (2.65)$$

ou, sous forme vectorielle,

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho \mathbf{g} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \mathbf{u}.} \quad (2.66)$$

Ce sont les équations de Navier⁷. Remarque sur le membre de gauche : comme nous sommes dans le cadre de l'élasticité linéaire, le terme d'advection $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$, non linéaire, est négligé dans l'expression de l'accélération.

2.6.2 Énergie élastique (Strain energy)

Il est aussi intéressant d'un point de vue théorique, de calculer

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} d\mathbf{x} = \iiint_V \frac{\rho}{2} \frac{\partial |\mathbf{v}|^2}{\partial t} d\mathbf{x} = \iiint_V \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} d\mathbf{x}, \quad (2.67)$$

où on a utilisé le fait qu'en élasticité linéaire, $D/Dt \approx \partial/\partial t$ car les variables \mathbf{x} et \mathbf{X} sont indistinguables. Par conservation de l'impulsion, le dernier terme s'écrit

$$\begin{aligned} & \iiint_V v_i \left(\rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) d\mathbf{x} = \iiint_V \left(\rho v_i g_i + \frac{\partial (v_i \tau_{ij})}{\partial x_j} - \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) d\mathbf{x} \\ & = \iiint_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} d\mathbf{x} + \iint_{\partial V} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} da - \iiint_V \tau_{ij} \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

par application du théorème de la divergence. Le dernier terme ci-dessus s'écrit enfin

$$- \frac{d}{dt} \iiint_V \mathcal{W} d\mathbf{x}, \quad (2.69)$$

7. Dérivée par lui en 1821 mais avec une seule constante élastique. Augustin Louis Cauchy (1789-1857), rapporteur du mémoire de Navier pour l'Académie des sciences, s'intéressa à ce problème. Après avoir correctement formulé la notion de contrainte, comme nous l'avons vu, il établit l'équation de l'élasticité sous sa forme actuelle.

si on introduit la fonction $\mathcal{W}(\mathcal{E})$ telle que

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial e_{ij}} = \tau_{ij}. \quad (2.70)$$

En combinant les expressions ci-dessus, on obtient finalement

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \left(\rho \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \mathcal{W} \right) d\mathbf{x} = \iiint_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} d\mathbf{x} + \iint_{\partial V} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} da, \quad (2.71)$$

ce qui donne à \mathcal{W} le sens d'une *densité d'énergie élastique*. En intégrant (2.70), il vient

$$\mathcal{W} = \mu e_{ij} e_{ij} + \frac{\lambda}{2} (e_{kk})^2 = \frac{1}{2} \tau_{ij} e_{ij}. \quad (2.72)$$

L'équation (2.71) implique une conservation de l'énergie mécanique. Aussi, les équations de Navier sont-elles conservatives, contrairement à celles de Navier-Stokes, qui sont dissipatives.

L'importance de \mathcal{W} vient du fait que (2.70) et (2.72) sont souvent pris comme point de départ pour l'élaboration d'une loi constitutive. Dans ce cas, (2.72) est vu comme le développement aux premiers ordres d'une énergie libre. Cette approche est utile en élasticité non linéaire, pour s'assurer que la loi de comportement non linéaire choisie pour modéliser un matériau ne viole pas le premier principe de thermodynamique. De plus, historiquement, et même avant la découverte des équations de Navier, l'évocation d'une énergie et sa minimisation a souvent été la méthode de construction de modèles mathématiques en élasticité.

Notons enfin que pour avoir $\mathcal{W} \geq 0$, il faut et il suffit que

$$K, \mu > 0. \quad (2.73)$$

2.6.3 Incompressibilité

Par (2.72), un matériau sera d'autant plus incompressible que λ sera plus grand que μ . En effet, dans ce cas, $e_{kk} = \operatorname{div} \mathbf{u}$ sera particulièrement coûteux à produire en énergie mécanique. Nous pouvons formuler cette hypothèse en écrivant $\lambda = \mu/\varepsilon$, où $\varepsilon \ll 1$. Dès lors, on a

$$\tau_{ij}/\mu = 2e_{ij} + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\mathbf{u})\delta_{ij}, \quad (2.74)$$

et τ diverge dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, sauf si $\operatorname{div} \mathbf{u} = O(\varepsilon)$. Posons donc

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = -\varepsilon \frac{p}{\mu}. \quad (2.75)$$

Cela conduit donc, dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, à

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (2.76)$$

On voit donc que p est étroitement lié à la contrainte d'incompressibilité. En exercice, on verra qu'elle peut être vue comme un multiplicateur de Lagrange associé à cette contrainte.

Exercices

2.1 Rappel de thermodynamique : $dE = T dS - p dV$. Pour un gaz parfait, on a d'une part $E = \frac{N}{2} nkT$, et d'autre part, $pV = nkT$, où N est le nombre de degrés de liberté par particule et k est la constante de Boltzmann. À partir de ces relations, établissez la loi $p\rho^{-\gamma} = \text{const}$ et montrez que $\gamma = (2 + N)/N$.

2.2 Calculez l'évolution de l'énergie

$$\iiint_{V(t)} \rho \left(c_v T + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) d\mathbf{x}$$

d'un volume de fluide et montrez que

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \Phi - p \operatorname{div} \mathbf{v},$$

où $\Phi = \lambda (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + 2\mu v_{ij} v_{ij}$.

[Ceci implique que la viscosité entraîne toujours une dissipation de chaleur et qu'elle est donc source d'irréversibilité.]

2.3 Montrez qu'à l'état stationnaire, la solution des équations de Navier minimise l'énergie

$$U = \iiint_V (\mathcal{W} - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}) d\mathbf{x}.$$

et que les conditions aux bords naturelles pour cette minimisation sont $\boldsymbol{\tau} \mathbf{n} = \mathbf{0}$ sur ∂V .

2.4 Répétez l'exercice avec la contrainte $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Montrez que le multiplicateur de Lagrange associé n'est autre que la pression p .

2.5 Montrez que $\mathcal{W} \geq 0$ et que \mathcal{W} s'annule pour $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ssi $\mu, K \geq 0$.

2.6 Par un bilan d'impulsion, calculez la force d'un fluide inviscide sur une conduite de section uniforme S pour un débit Q donné sachant que la direction de sortie fait un angle α avec la direction d'entrée.

Chapitre 3

Applications des équations générales

3.1 Équations sous forme adimensionnelle

Imaginons un écoulement dans une géométrie donnée de grandeur caractéristique L . Par exemple : tasse – 5cm, tuyau d'arrosage – 1 cm, piscine – 10 m, cours d'eau – entre quelques cm et plusieurs km, insecte – qqes mm. On connaît généralement aussi le (ou les) temps caractéristique(s) du phénomène étudié, T . De manière équivalente, on peut connaître $V = L/T$, une vitesse typique de l'écoulement en question (si on connaît V et L , on déduit $T = L/V$). Cela nous amène à écrire

$$\mathbf{v} = V\mathbf{v}', \quad \mathbf{x} = L\mathbf{x}', \quad t = \frac{L}{V}t', \quad (3.1)$$

où \mathbf{v}' , \mathbf{x}' , t' sont des quantités sans dimension. Par substitution dans (2.56), on obtient

$$\frac{V^2}{L}\rho \frac{D\mathbf{v}'}{Dt'} = \rho\mathbf{g} - \frac{1}{L}\nabla p + \mu \frac{V}{L^2}\nabla^2\mathbf{v}', \quad \frac{V}{L}\operatorname{div}\mathbf{v}' = 0 \quad (3.2)$$

où l'opérateur $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'})$. Après réarrangement,

$$\frac{D\mathbf{v}'}{Dt'} = \frac{L}{V^2}\mathbf{g} - \frac{1}{\rho V^2}\nabla p + \frac{\mu}{\rho V L}\nabla^2\mathbf{v}', \quad \operatorname{div}\mathbf{v}' = 0 \quad (3.3)$$

Aussi, en définissant

$$\mathbf{g}' = \frac{L}{V^2}\mathbf{g}, \quad p' = \frac{p}{\rho V^2}, \quad \mathbf{R} = \frac{\rho V L}{\mu}, \quad (3.4)$$

et en omettant les primes, on obtient

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{g} - \nabla p + \frac{1}{R} \nabla^2 \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (3.5)$$

Dans ces équations sans dimension, il ne subsiste des grandeurs caractéristiques initiales que R , le *nombre de Reynolds*. Du fait des renormalisations (3.1) et (3.4), on peut raisonnablement s'attendre à ce que $\mathbf{v}', g', p' = O(1)$. Aussi l'importance relative du dernier terme dans la première équation de (3.5), c'est-à-dire des effets visqueux, est déterminée par R . Deux cas limites se dégagent immédiatement de cette analyse.

1. Écoulements à grand R : loin des bords (couches limites), on peut supposer en première approximation que

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{g} - \nabla p, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (3.6)$$

càd. que le fluide est approximativement inviscide.

2. Écoulements à petit R : dans ce cas, c'est le dernier terme qui domine, et généralement la pression doit se remettre à l'échelle selon $p' = p''/R$, ce qui donne en première approximation (en omettant les primes)

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla p, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (3.7)$$

On voit que la structure des équations est très différente dans les deux cas, ce qui augure des comportements qualitativement très différents aussi. Le second cas est typique des écoulements aux "petites" échelles spatiales, ou "très visqueux". Noter que le recours aux grandeurs sans dimensions donne un sens précis à "petit" et "très" –c'est là tout l'avantage de la procédure.

Un autre enseignement à tirer de (3.5) est que toute grandeur globale de l'écoulement ne dépend de ses paramètres caractéristiques qu'à travers le groupement $R = \rho LV/\mu = LV/\nu$. On peut ainsi prédire, par exemple, que le coefficient de frottement aérodynamique d'une sphère sera une fonction $\phi(R)$, ce qui est une grande simplification par rapport à $\phi(\mathbf{v}, \mu, \rho, L)$.

Le recours aux grandeurs sans dimensions est très utile pour les calculs numériques et analytiques. Il permet de simplifier les notations en réduisant le nombre de symboles, donc les risques d'erreur et, s'il est judicieusement opéré, permet de supposer que les grandeurs traitées sont toutes d'ordre 1. Cependant nous n'excluons pas l'écriture des équations en dimensions dans la suite, car les symboles dimensionnels rappellent le sens physique de certains termes (par ex., $\rho D\mathbf{v}/Dt$: inertie, $\mu \nabla^2 \mathbf{v}$: viscosité).

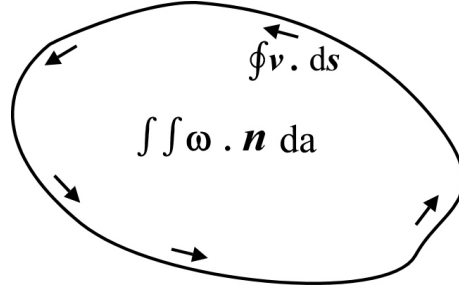


FIGURE 3.1 – Correspondance entre vorticité et circulation.

3.2 Écoulements inviscides

3.2.1 Vorticité

Revenons aux écoulement inviscides, càd. caractérisés par $R \gg 1$. Une propriété importante du champ de vitesse est sa *vorticité*, définie par

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}. \quad (3.8)$$

$\boldsymbol{\omega}$ est le vecteur de rotation moyenne des axes initialement cartésiens attachés à un paquet fluide (cf EX. 1.7) (voir le livre d'Acheson pour de nombreux exemples d'application). L'intégrale de la vorticité sur une surface est aussi, selon le théorème de Stokes, la circulation du champ de vitesse sur le pourtour de celle-ci (Fig. 3.1) :

$$\iint \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \, da = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}. \quad (3.9)$$

Notons l'identité intéressante

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{v}|^2. \quad (3.10)$$

En effet, $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})_i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jmn} (\partial_m v_n) v_k = \varepsilon_{jki} \varepsilon_{jmn} (\partial_m v_n) v_k = (\delta_{km} \delta_{in} - \delta_{kn} \delta_{im}) (\partial_m v_n) v_k = (\partial_k v_i) v_k - (\partial_i v_k) v_k$. En appliquant cette identité à (2.48), l'équation de l'impulsion devient

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{v}|^2. \quad (3.11)$$

Notons que pour un gaz parfait subissant des compressions et dilatations isentropiques, $p\rho^{-\gamma} = \text{const}$. Sous cette contrainte, on peut aisément déduire (Exercice 3.1) que

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\nabla p}{\rho}. \quad (3.12)$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ et ρ est donc uniforme à tout moment s'il l'est initialement. On aura donc $\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla\frac{p}{\rho}$. On peut résumer ces deux situations en écrivant

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \beta\nabla\frac{p}{\rho}. \quad (3.13)$$

où $\beta = 1$ pour un fluide incompressible et $\beta = \frac{\gamma}{\gamma-1}$ pour une détente isentropique. En outre, on peut souvent supposer que \mathbf{g} dérive d'un potentiel

$$\mathbf{g} = -\nabla\chi, \quad (3.14)$$

de sorte que l'équation de l'impulsion s'écrit finalement :

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\nabla\left(\chi + \beta\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2\right). \quad (3.15)$$

La quantité entre parenthèses peut être comprise comme une énergie par unité de masse d'un paquet fluide¹. Calculons le rotationnel de cette expression. Par application de l'EX 1.9, il résulte

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \operatorname{div}\mathbf{v}. \quad (3.16)$$

On note en particulier que si $\boldsymbol{\omega}$ est nul partout initialement, il le restera. De plus, pour un fluide incompressible ($\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$) et 2D ($\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v} = 0$), la vorticité est automatiquement conservée.

3.2.2 Bernoulli

Écoulement stationnaire

Soit un écoulement stationnaire. En prenant le produit scalaire de \mathbf{v} avec (3.15) on trouve

$$\mathbf{v} \cdot \nabla\left(\chi + \beta\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2\right) = 0. \quad (3.17)$$

Ainsi, l'énergie spécifique est constante le long d'une ligne de courant.

1. On définit de manière équivalente la *hauteur de charge* $H = (\chi + \beta\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2)/g$. Celle-ci a la dimension d'une longueur et est plus directement accessible expérimentalement.

Écoulement incompressible et irrotationnel

Supposons que $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$. Dans ce cas, on peut écrire

$$\mathbf{v} = \nabla\phi, \quad \nabla^2\phi = 0, \quad (3.18)$$

et l'équation de l'impulsion devient

$$\nabla \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \chi + \beta\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 \right) = 0. \quad (3.19)$$

La quantité entre parenthèses ne dépend donc pas de l'espace, ce qui donne

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \chi + \beta\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 = 0. \quad (3.20)$$

À noter que le membre de droite peut être posé égal à zéro sans perte de généralité, car on peut ajouter à ϕ une fonction arbitraire $f(t)$ sans affecter \mathbf{v} .

Note : l'hypothèse $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ se rencontre dans de nombreux cas pratiques. En effet, si $\boldsymbol{\omega}$ est nul initialement dans un paquet fluide, il le restera ultérieurement d'après (3.16).

3.2.3 Fluide compressible dans une tuyère

Considérons un écoulement gazeux, $p\rho^{-\gamma} = \text{const.}$ dans une tuyère de section S variable. En supposant la vitesse uniforme selon l'axe de la tuyère, on a, par conservation de la masse, $\rho v S = \text{const.}$ Enfin, on a $\beta p / \rho + v^2 / 2 = \text{const.}$ Différencions ces trois relations pour étudier la variation de la vitesse avec la section S . Si le fluide était incompressible, on saurait immédiatement qu'une diminution de section entraînerait une accélération, par conservation de la masse. Dans le cas présent, on a

$$\frac{1}{p} dp - \frac{\gamma}{\rho} d\rho = 0, \quad (\text{équation d'état}) \quad (3.21)$$

$$\frac{dv}{v} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dS}{S} = 0, \quad (\text{masse}) \quad (3.22)$$

$$\beta \frac{dp}{\rho} - \beta p \frac{d\rho}{\rho^2} + v dv = 0. \quad (\text{Bernoulli}) \quad (3.23)$$

C'est là un système de trois équations à trois inconnues, dp , dv , $d\rho$ à résoudre en fonction de dS . Par éliminations successives, on obtient

$$\left(1 - \frac{\rho v^2}{\gamma p} \right) \frac{dv}{v} = -\frac{dS}{S}. \quad (3.24)$$

Dans le facteur entre parenthèses, on reconnaît (Exercice 3.2) la vitesse du son, c , donnée par $c^2 = \gamma p / \rho$ et on définit le nombre de Mach $M = v/c$. La dernière expression s'écrit donc

$$(1 - M^2) \frac{dv}{v} = -\frac{dS}{S}. \quad (3.25)$$

Ainsi, pour des vitesses subsoniques, $M < 1$, une diminution de section entraîne une accélération de l'écoulement mais pour des vitesses supersoniques, $M > 1$, c'est l'inverse. En particulier, si $M > 1$, $dS > 0 \rightarrow dv > 0$!

3.2.4 Vagues en eau profonde

Nous considérons la situation décrite en Fig. 2.2, avec quelques modifications. Nous travaillons à 2D avec les coordonnées (x, z) . Le fond est supposé se trouver à $z = -\infty$ et, en $z = h$, la condition dynamique est modifiée par l'inclusion de la tension de surface $p = p_a - \gamma\kappa$, où κ est le rayon de courbure donné par

$$\kappa = \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}}. \quad (3.26)$$

En supposant le champ de vitesse irrotationnel, on a

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (3.27)$$

pour $z < h(x, t)$ et

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + gh - \frac{\gamma\kappa}{\rho} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (3.28)$$

en $z = h(x, t)$ (la pression constante p_a est éliminée de l'expression ci-dessus sans perte de généralité). Dans un premier temps, nous cherchons des solutions avec la dépendance spatio-temporelle $e^{i(kx - \omega t)}$. Nous voulons donc que

$$\phi \propto \operatorname{Re} \left(e^{i(kx - \omega t)} \right). \quad (3.29)$$

En effet, la fonction $\exp i(kx - \omega t)$ peut aussi s'écrire $\exp ik(x - ct)$ avec $c = \omega/k$. Il s'agit donc d'une fonction sinusoïdale qui se translate avec une vitesse c dans le sens des x positifs. Cette vitesse est appelée *vitesse de phase*, puisqu'elle se rapporte essentiellement à la phase de la sinusoïde que décrit la surface de l'eau. Notons que la fonction ci-dessus n'est pas solution de (3.27). Néanmoins, on trouve facilement que

$$\phi = Ae^{i(kx - \omega t) + kz} + \text{c.c.} \quad (3.30)$$

satisfait (3.27) et tend vers zéro lorsque $z \rightarrow -\infty$. L'expression (3.30) indique que l'amplitude de l'onde devient rapidement négligeable dès que $|kz| > 1$. Par conséquent si le fond de l'eau se trouve à z_{\min} , son effet sur l'écoulement devient négligeable dès que $|z_{\min}|$ est plus grand que quelques longueurs d'onde. C'est cela que nous entendons par vague en "eau profonde".

Supposons que l'amplitude de l'onde soit suffisamment faible pour que

1. nous puissions évaluer (3.28) en $z = 0$,
2. nous puissions y négliger les termes non linéaires et écrire

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + gh - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \approx 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} \approx \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (3.31)$$

Dans ce cas, la seconde équation ci-dessus donne immédiatement

$$h \approx \frac{ik}{\omega} A e^{i(kx - \omega t) + kz} + \text{c.c.} \quad (3.32)$$

et la première donne alors

$$-i\omega + g \frac{ik}{\omega} + \frac{i\gamma k^3}{\rho\omega} = 0 \rightarrow \boxed{\omega^2 = gk + \gamma k^3 / \rho}. \quad (3.33)$$

La relation encadrée est la *relation de dispersion* des ondes se propageant à la surface de l'eau. Les deux termes de droite représentent chacun un moteur du mouvement des ondes : la gravité et la tension de surface. Le rapport de ces deux termes permet de décider lequel des deux effets est le plus important. Il s'exprime comme

$$\frac{\gamma k^3 / \rho}{gk} = (k\lambda_c)^2, \quad (3.34)$$

où $\lambda_c = \sqrt{\gamma / \rho g}$ est appelée *longueur capillaire* (angl : capillary length). Pour l'interface air/eau, $\gamma = 0.073 \text{ N/m}$, ce qui donne $\lambda_c = 2.7 \text{ mm}$. La longueur d'onde pour laquelle les deux termes de droite de (3.33) sont égaux est à peu près 1.7 cm.

Paquets d'ondes

De (3.33), nous tirons l'expression de la vitesse de phase

$$c = \omega/k = \left(\frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho} \right)^{1/2} = \sqrt{g\lambda_c} \left(\frac{1}{k\lambda_c} + k\lambda_c \right)^{1/2} \quad (3.35)$$

à laquelle se propagent les crêtes des ondes, voir Fig. 3.2. Deux cas limites se dégagent. D'une part, pour les petites longueurs d'onde, $k\lambda_c \gg 1$, on a,

$$c \sim \sqrt{\gamma k / \rho}$$

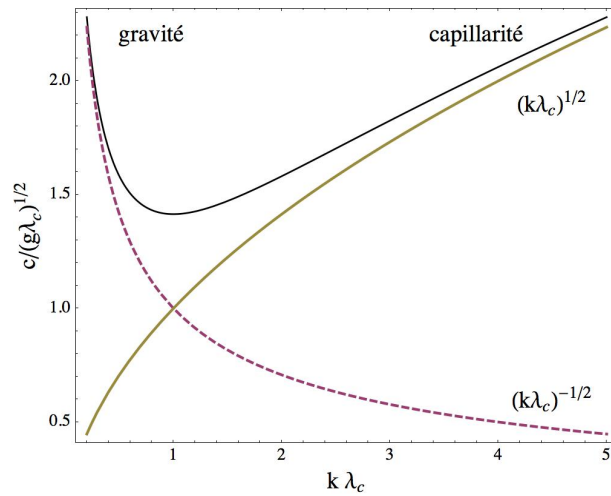


FIGURE 3.2 – Illustration de la relation de dispersion (3.35)

et les plus petites longueurs d'onde se propagent le plus vite. Ce sont les ondes capillaires. Exemple d'ondes capillaires : ondes formées par l'impact de gouttes de pluie. D'autre part, pour $k\lambda_c \ll 1$, on trouve les ondes de gravité, dont la vitesse est donnée par

$$c \sim \sqrt{g/k}.$$

Dans cette limite, les plus grandes longueurs d'onde ont les plus grandes vitesses.

A côté de la vitesse de phase, on définit la *vitesse de groupe* par

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}. \quad (3.36)$$

C'est à cette vitesse que se propage toute information, ou énergie, portée par un paquet d'ondes². Enfin, une troisième caractéristique importante est le *coefficient de dispersion*

$$\beta = \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \quad (3.37)$$

qui décrit l'étalement d'un paquet d'ondes au cours du temps.

On peut arriver à ces notions de vitesse de groupe et de coefficient de dispersion de différentes manières. Une approche assez générale consiste à

². Il est intéressant de réfléchir au fait qu'une onde purement monochromatique ne peut véhiculer aucune information -à part le fait d'exister.

écrire

$$h(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ik}{\omega} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk = \int_{-\infty}^{\infty} B(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk. \quad (3.38)$$

Pour autant que cette intégrale converge, ceci est certainement une solution du problème linéarisé donné par (3.27) et (3.31). Pour un paquet d'onde, la fonction $B(k)$ est concentrée autour d'un nombre d'onde particulier k_0 et décroît rapidement ailleurs. On effectue dès lors un développement limité de l'exponentielle autours de k_0 :

$$\begin{aligned} k &= k_0 + K, \quad B(k) = B(k_0 + K) = \tilde{B}(K), \quad dk = dK, \\ \exp i(kx - \omega(k)t) &\approx \exp i \left(k_0 x + Kx - \left(\omega(k_0) + \frac{\partial \omega}{\partial k} K + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} K^2 + \dots \right) t \right) \\ &= \exp i \left(k_0 x - \omega(k_0)t + K \left(x - \frac{\partial \omega}{\partial k} t \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} K^2 t \right), \\ &= \exp i \left(k_0 x - \omega(k_0)t + K (x - v_g t) - \frac{\beta}{2} K^2 t \right). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Un développement similaire se fait autours de $-k_0$. L'expression (3.38) se réécrit donc, approximativement,

$$h(x, t) \approx e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)} \int \tilde{B}(K) e^{i(K(x - v_g t) - \frac{\beta}{2} K^2 t)} dK + \text{c.c.} \quad (3.40)$$

Dans cette intégrale, on suppose que $K \ll k_0$. Aussi la fonction

$$\psi(x, t) = \int \tilde{B}(K) e^{i(K(x - v_g t) - \frac{\beta}{2} K^2 t)} dK \quad (3.41)$$

varie-t-elle lentement par rapport à $e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)}$. Les crêtes des vagues sont donc bien données par $e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)}$ et elle se déplacent à une vitesse c évaluée en k_0 . La fonction ψ est une modulation lente de ces oscillations. Sur des temps modérés et en supposant que K est suffisamment "petit", on peut négliger $\frac{\beta}{2} K^2 t$ devant $K(x - v_g t)$. Ainsi, l'amplitude $\psi(x, t)$ est approximativement donnée par

$$\psi(x, t) \approx \int \tilde{B}(K) e^{iK(x - v_g t)} dK = \psi(x - v_g t). \quad (3.42)$$

Nous voyons donc que pour des temps modérément longs, l'élévation de l'eau est décrite par

$$h(x, t) = e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)} \psi(x - v_g t), \quad (3.43)$$

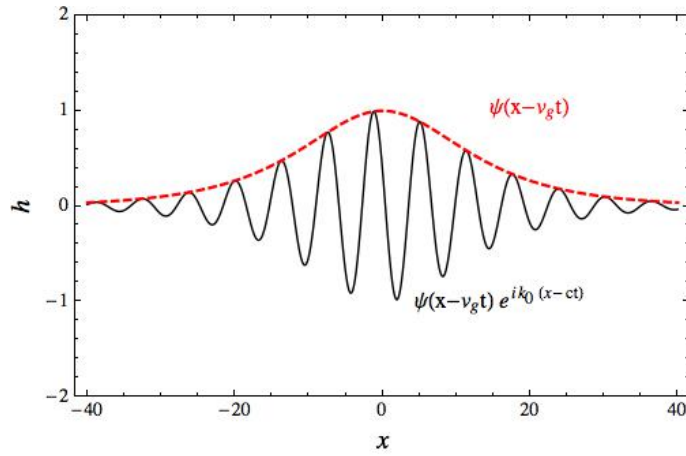


FIGURE 3.3 – Représentation d’un paquet d’ondes : les oscillations se propagent à la vitesse c , l’amplitude à la vitesse v_g .

qui est bien un paquet d’onde se déplaçant à la vitesse v_g , voir Fig. 3.3

Posons maintenant $\xi = x - v_g t$ et écrivons, sur base de ce qui précède,

$$\psi = \psi(\xi, t) = \int \tilde{B}(K) e^{i(K\xi - \frac{\beta}{2} K^2 t)} dK + \text{c.c.} \quad (3.44)$$

On vérifiera (Exercice 3.6) qu’un paquet d’onde initial $\psi(x, 0) = e^{-x^2}$ devient

$$\psi = \frac{e^{-\xi^2/(1+2i\beta t)}}{\sqrt{1+2i\beta t}}, \quad (3.45)$$

et, comme illustré en Fig. 3.4, ce profil s’étale dans le temps. Il est intéressant de remarquer que 3.44 est la solution générale de

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = 0. \quad (3.46)$$

qui n’est autre que l’équation de Schrödinger d’une particule libre. C’est aussi l’équation paraxiale à une dimension en optique ainsi que l’équation d’une impulsion dans un guide d’onde. Lorsque l’on prend en compte les effets non linéaires négligés jusqu’ici, l’équation pour ψ devient *l’équation de Schrödinger non linéaire* ou “NLS” :

$$\boxed{i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \gamma |\psi|^2 \psi = 0.} \quad (3.47)$$

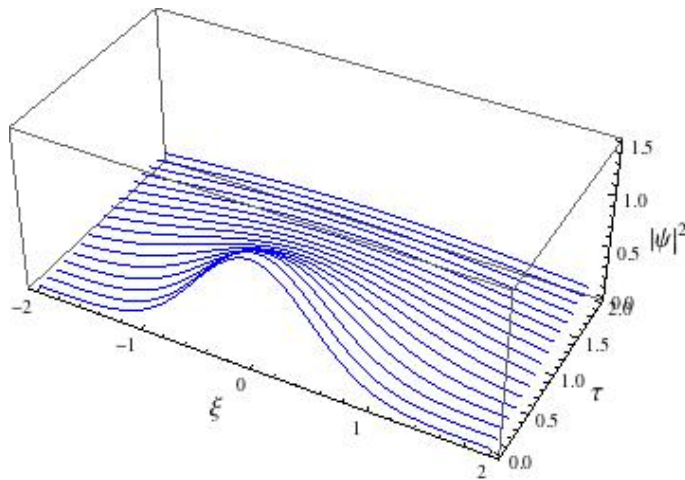


FIGURE 3.4 – Illustration de l’effet de la dispersion chromatique sur un paquet de vagues gaussien, d’après (A.32)

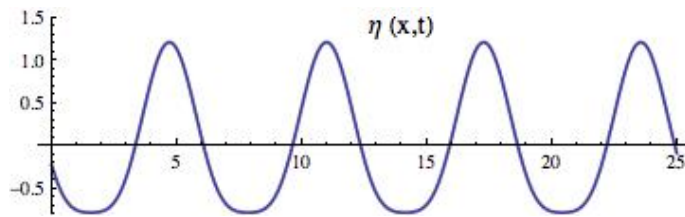


FIGURE 3.5 – Profil de vague non linéaire, d’après calcul au deuxième ordre.

Dans le cas des ondes de gravité, le coefficient non linéaire ci-dessus est $\gamma = 2\omega_0 k_0^2$; voir complément du cours. Cette équation est extrêmement importante en physique non linéaire. Bien qu’établie dans un cas particulier, il faut s’attendre à la rencontrer dans toutes les situations physiques où existent des paquets d’onde. Insistons sur le fait que ψ dans (3.47) est une amplitude lentement variable multipliant une onde porteuse $\exp i(k_0 x - \omega_0 t)$.

D’après la Fig. 3.2, $\beta = \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} = \frac{\partial v_g}{\partial k} < 0$ pour les ondes de gravité; par un choix approprié d’unités on peut imposer $\beta = -1$ et $\gamma = 1$ dans (3.47).

L’équation NLS est dérivée en complément du cours par une analyse multi-échelle faiblement non linéaire. Dans cette dérivation, on trouve notamment que le profil des vagues est légèrement modifiée par rapport au profil sinusoïdal; il est plus aplati dans les creux et plus piqué aux crêtes, voir Fig. 3.5

Applications de la NLS

Étudions les implications de (3.47) à propos des trains de vagues. Les trains de vagues uniformes, c.à.d. où $|\psi|$ est constant, sont donnés par les solutions $\psi = ae^{-i\gamma a^2 t}$, où a est un nombre réel. Donc, on a la solution non linéaire

$$h = a \left(e^{i(k_0 x - \omega_0 t) - i\gamma a^2 t} + \text{c.c.} \right) = 2a \cos(k_0 x - (\omega_0 + \gamma a^2)t) \quad (3.48)$$

On voit donc que la fréquence de l'onde dépend de son amplitude, chose tout à fait impossible dans un système linéaire.

Examinons à présent la stabilité de ce train d'ondes, en posant $\psi = a(1 + u(\xi, t) - iv(\xi, t))e^{-2ia^2 t}$, où u et v sont réels et petits devant 1 et sont, respectivement, une perturbation d'amplitude et une perturbation de phase. On arrive à (Exercice 3.7)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta\gamma a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\beta^2}{4} \frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4} = 0. \quad (3.49)$$

Cette équation admet des solutions de la forme $e^{\sigma t + iK\xi}$ avec

$$\sigma^2 = -\beta\gamma a^2 K^2 - \frac{\beta^2}{4} K^4. \quad (3.50)$$

Si $\beta\gamma < 0$, ce qui est le cas pour les ondes de gravité, il existe une gamme de nombres d'onde K pour lesquels σ est réel et ces perturbations croissent donc exponentiellement dans le temps. La solution (3.48) est par conséquent *instable*. La perturbation qui croît le plus vite correspond à

$$K_{\max}^2 = -2\gamma a^2 / \beta, \quad \sigma_{\max} = \gamma a^2. \quad (3.51)$$

La perturbation du train de vagues correspondante est

$$h'_{\text{perturb}} \propto e^{\sigma_{\max} t} \cos[(k_0 + K_{\max})x - (\omega_0 + 2\gamma a^2 + K_{\max} v_g)t]. \quad (3.52)$$

Ainsi, le train d'ondes (3.48) est déstabilisé au profit d'autres trains d'ondes aux nombres d'onde légèrement décalés. Cette instabilité hydrodynamique porte le nom de Benjamin-Feir. On la retrouve dans bien d'autres contextes sous le nom d'*instabilité modulationnelle*.

Enfin, la nonlinéarité dans (3.47) tend à concentrer l'énergie d'un train d'ondes en un point ("autofocalisation", en optique), ce qui peut compenser la dispersion dont souffrait la solution (A.32). Grâce à ce phénomène, on assiste à un nouveau type d'ondes, les ondes solitaires, dont le profil ne varie pas en cours de propagation. La plus simple est donnée par

$$\psi = a \operatorname{sech} \left(\sqrt{-\gamma/\beta} a \xi \right) e^{-i\gamma a^2 t/2}. \quad (3.53)$$



FIGURE 3.6 – Trainée hydrodynamique d'un bateau à grande vitesse, d'un bateau à faible vitesse et d'un canard. Photos 1 et 2 prises sur www.wikipedia.org et www.wikiwave.org. Canard photographié par Suzy Lafferty, www.sjlshots.com

3.2.5 Trainée hydrodynamique

Comme dernière application de la théorie des vagues en eau profonde, nous considérons les vagues composant la trainée d'un bateau illustrée par la Fig. 3.6. Ces vagues sont confinées dans un cône d'émission dont l'angle d'ouverture ($\approx 38^\circ$) est le même pour tous les bateaux, indépendamment de leur vitesse, et même les canards.

L'explication de ce phénomène repose sur la relation de dispersion des vagues produites par un bateau en mouvement. Dans le régime linéaire, les équations de mouvement sont données par (3.27) et (3.31), où nous négligeons la tension de surface. Par différentiation croisée, on peut éliminer h de (3.31) et obtenir

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad z < 0, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = 0. \quad (3.54)$$

Adoptons un système de coordonnées mouvant à la vitesse d'un bateau dans

la direction $-\mathbf{e}_x$ et posons $x' = x + Vt$. Nous supposons que dans ce système de coordonnées, le profil des vague est stationnaire :

$$\phi(x, y, z, t) = \Phi(x + Vt, y, z) = \Phi(x', y, z). \quad (3.55)$$

Nous avons donc

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad z < 0, \quad V^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad z = 0. \quad (3.56)$$

Les ondes de surface les plus simples sont de la forme

$$\Phi \propto e^{i(k_x x' + k_y y) + \sqrt{k_x^2 + k_y^2} z}. \quad (3.57)$$

La condition au bord donne la relation de dispersion

$$\sqrt{k_x^2 + k_y^2} = k_x \ell, \quad (3.58)$$

où nous avons posé

$$\ell = V^2/g. \quad (3.59)$$

Précédemment, nous avons une relation de dispersion liant la pulsation ω au nombre d'onde k_x . Cette fois-ci, elle lie k_y à k_x . La résolution de (3.58) donne

$$k_y = \pm k_x \sqrt{k_x^2 \ell^2 - 1} \equiv \pm K_y(k_x) \quad (3.60)$$

En surface, la solution élémentaire (3.57) est donc

$$\Phi \propto e^{i(k_x x' - K_y(k_x) y)}, \quad e^{i(k_x x' + K_y(k_x) y)}. \quad (3.61)$$

Ainsi, la solution générale peut s'écrire

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} A(k_x) e^{i(k_x x' - K_y(k_x) y)} dk_x + \int_{-\infty}^{\infty} B(k_x) e^{i(k_x x' + K_y(k_x) y)} dk_x \quad (3.62)$$

Les intégrales ci-dessus sont du même type que celle dans (3.38), où t est remplacé par y . Par le même raisonnement que pour (3.38), on trouve donc que le battement produit par une gamme de nombres d'onde concentrée autour d'un certain k_x se propage à la "vitesse" de groupe

$$v_g(k_x) = \pm \frac{\partial K_y}{\partial k_x} = \pm \frac{2k_x^2 \ell^2 - 1}{\sqrt{k_x^2 \ell^2 - 1}}. \quad (3.63)$$

On a donc, pour le lieu de ce battement,

$$y/x' = \frac{\pm 1}{v_g(k_x)}. \quad (3.64)$$

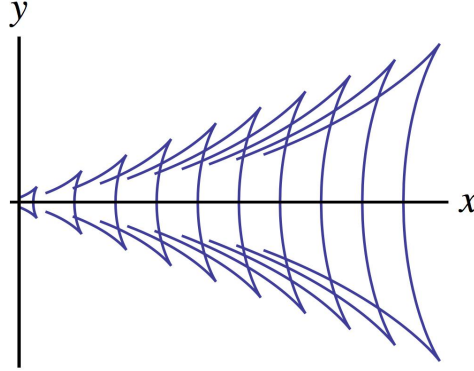


FIGURE 3.7 –

En dérivant cette expression par rapport à k_x , on trouve que le maximum est obtenu pour

$$k_x^{*2} \ell^2 = 3/2, \quad \rightarrow \quad k_x^* = \frac{\sqrt{3/2}}{\ell}. \quad (3.65)$$

L'ouverture du cône d'émission à ce nombre d'onde est indépendant de ℓ , càd de g et de V , et est donné par $2\theta_{\max}$, où

$$\tan \theta_{\max} = \frac{1}{v_g(k_x^*)} = \frac{1}{\sqrt{8}}, \quad \rightarrow \quad \theta_{\max} \approx 19.47^\circ. \quad (3.66)$$

Cherchons ensuite la position des crêtes des vagues. Il s'agit, à l'intérieur du battement, de trouver le lieu de phase constante. On doit donc avoir, pour $y > 0$,

$$k_x x' - K_y(k_x) y = C, \quad (3.67)$$

$$x' - v_g(k_x) y = 0. \quad (3.68)$$

La solution est donnée par

$$x' = \frac{C v_g(k_x)}{k_x v_g(k_x) - K_y(k_x)} = \frac{C(2\ell^2 k_x^2 - 1)}{\ell^2 k_x^3} = \tilde{C} \frac{2q^2 - 1}{q^3}, \quad (3.69)$$

$$y = \frac{C}{k_x v_g(k_x) - K_y(k_x)} = \frac{C \sqrt{\ell^2 k_x^2 - 1}}{\ell^2 k_x^3} = \tilde{C} \frac{\sqrt{q^2 - 1}}{q^3}, \quad (3.70)$$

où nous avons posé $\tilde{C} = \ell C$, $q = \ell k_x$. Pour une phase donnée, càd $\tilde{C} = \text{constant}$, l'expression ci-dessus décrit une courbe paramétrée par ℓk_x dans le plan (x, y) . Ces courbes sont représentées à la Fig. 3.7

3.2.6 Vagues en eau peu profonde. Ondes solitaires

La présente section décrit la "great wave of translation", observée pour la première fois par Scott Russel. Il s'agit d'une vague particulière que ce dernier suivit à cheval, sur plusieurs kilomètres avant qu'elle ne disparaisse. Cette observation est à l'origine de la découverte et de l'étude des ondes solitaires et, un siècle plus tard, des solitons.

I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped - not so the mass of water in the channel which it had put in motion ; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the Wave of Translation ("Report on Wave", Rep. 14th Meet. Brit. Assoc. Adv. Sci., York, 311-90 (1844))

Reprenons la situation décrite en Fig. 2.2, mais cette fois dans un domaine de profondeur finie. Nous considérons à présent des vagues non linéaires de grande extension horizontale par rapport à la profondeur. Nous allons dériver la fameuse équation de Korteweg et de Vries, qui décrit la propagation de vagues solitaires. Il s'agit ici d'une seule vague, et non d'un train de vagues, comme dans les sections précédentes. Nous partons de (3.27) et (3.28), avec $\gamma = 0$. Notons la profondeur initiale h_0 et considérons une onde de longueur L grande par rapport à h_0 . Procédons d'abord à la normalisation des variables

$$x = Lx' = \frac{h_0}{\delta} x', \quad z = h_0 z', \quad h = h_0 (1 + \epsilon \eta), \quad t = Tt', \quad \phi = -\rho g h_0 t + \frac{h_0^2}{T} \varphi. \quad (3.71)$$

Cela donne (en omettant les primes)

$$\delta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} = 0, \quad 0 < z < 1 + \epsilon \eta \quad (3.72)$$

avec les conditions aux limites

$$\varphi_z = 0, \quad z = 0, \quad (3.73)$$

$$\varphi_t + \mathcal{G}\eta + \frac{1}{2}(\delta^2\varphi_x^2 + \varphi_z^2) = 0, \quad z = 1 + \epsilon\eta, \quad (3.74)$$

$$\varphi_z = \epsilon(\eta_t + \delta^2\varphi_x\eta_x) = 0, \quad z = 1 + \epsilon\eta, \quad (3.75)$$

où $\mathcal{G} = \epsilon T^2 g/h_0$. Ne sachant pas à l'avance le temps caractéristique T approprié, nous ne pouvons dire si \mathcal{G} doit être $O(1)$. Nous supposons néanmoins que c'est le cas. Dans la limite $\delta \ll 1$, et compte tenu de (3.73), nous avons (Ex. 3.8)

$$\varphi(x, z, t) = \varphi_0(x, t) + \delta^2 \left(\varphi_2(x, t) - \frac{z^2}{2} \varphi_{0,xx}(x, t) \right) + \dots \quad (3.76)$$

En substituant cette expression dans (3.74) et (3.75), on trouve

$$\varphi_{0,t} + \delta^2 \left(\varphi_{2,t} - \frac{1}{2} \varphi_{0,xxt} \right) + \mathcal{G}\eta + \frac{\delta^2}{2} \varphi_{0,x}^2 = O(\delta^4, \epsilon\delta^2), \quad (3.77)$$

$$- (1 + \epsilon\eta) \delta^2 \varphi_{0,xx} + \delta^4 \left(\frac{1}{6} \varphi_{0,xxxx} - \varphi_{2,xx} \right) = \epsilon(\eta_t + \delta^2 \varphi_{0,x} \eta_x) + O(\delta^6, \epsilon\delta^4), \quad (3.78)$$

et pour équilibrer les deux membres de la seconde équation, il faut $\epsilon = \delta^2$. Posons donc

$$\eta = \eta_0 + \delta^2 \eta_2 + \dots \quad (3.79)$$

A l'ordre dominant, (3.77) et (3.78) deviennent

$$\varphi_{0,t} \sim -\mathcal{G}\eta_0, \quad -\varphi_{0,xx} \sim \eta_{0,t}, \quad (3.80)$$

ou encore

$$\eta_0 = \frac{-1}{\mathcal{G}} \varphi_{0,t}, \quad \varphi_{0,tt} - \mathcal{G}\varphi_{0,xx} = 0. \quad (3.81)$$

Conclusion : d'avoir supposé que $\mathcal{G} = O(1)$ nous donne à l'ordre dominant une équation d'onde, de solution générale $\varphi_0 = \varphi_0(x \pm \mathcal{G}t)$. C'est là un bon point de départ pour décrire une onde solitaire et nous conforte dans notre hypothèse. De plus, comme T est libre, nous pouvons poser

$$\mathcal{G} = 1, \quad \rightarrow \quad T = \sqrt{\frac{h_0}{\delta^2 g}}, \quad \rightarrow \quad V = \frac{L}{T} = \sqrt{gh_0}. \quad (3.82)$$

Ainsi, l'unité de vitesse correspond à la vitesse d'une vague de grande longueur par rapport à la profondeur du canal, dans le régime linéaire (EX.3.9).

Au vu de ce résultat, nous révisons nos développements asymptotiques en supposant que nos fonctions dépendent du temps et de x comme

$$f(x, t) = f(\xi, \tau), \quad \xi = x - t, \quad \tau = \delta^2 t, \quad (3.83)$$

où nous avons introduit une lente dépendance temporelle pour permettre au profil φ_0 d'évoluer sur les temps longs. Dans les développements précédents, nous devons à présent faire³

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \xi} + \delta^2 \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (3.84)$$

Avec ces changements, nous trouvons, à l'ordre suivant dans (3.77) et (3.78),

$$\varphi_{0,\tau} - \varphi_{2,\xi} + \frac{1}{2}\varphi_{0,\xi\xi\xi} + \eta_2 + \frac{1}{2}\varphi_{0,\xi}^2 = 0, \quad (3.85)$$

$$-\eta_0\varphi_{0,\xi\xi} + \frac{1}{6}\varphi_{0,\xi\xi\xi\xi} - \varphi_{2,\xi\xi} = \eta_{0,\tau} - \eta_{2,\xi} + \varphi_{0,\xi}\eta_{0,\xi}, \quad (3.86)$$

et la condition de solvabilité s'obtient en résolvant la première équation pour η_2 et en substituant le résultat dans la seconde :

$$-\eta_0\varphi_{0,\xi\xi} - \varphi_{0,\xi\tau} - \frac{1}{3}\varphi_{0,\xi\xi\xi\xi} - \varphi_{0,\xi}\varphi_{0,\xi\xi} = \eta_{0,\tau} + \varphi_{0,\xi}\eta_{0,\xi}. \quad (3.87)$$

Compte tenu que $\eta_0 = \varphi_{0,\xi}$, cela se simplifie en

$$2\eta_{0,\tau} + 3\eta_0\eta_{0,\xi} + \frac{1}{3}\eta_{0,\xi\xi\xi} = 0, \quad (3.88)$$

ou, après de mineures modifications d'échelles :

$$\boxed{u_\tau + 6uu_\xi + u_{\xi\xi\xi} = 0.} \quad (3.89)$$

C'est la célèbre équation de Korteweg et de Vries (1895), ou "KdV", qui admet l'onde solitaire de Russel comme solution. On trouve en effet (Ex.3.10) qu'elle admet des solutions de la forme $u(\xi - c\tau)$, où

$$u(\xi - c\tau) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{c^{1/2}}{2} (\xi - c\tau) \right). \quad (3.90)$$

Voir Fig. 3.8. Il faut noter qu'on a une famille de solutions possibles et que la vitesse de ces solutions est liée à leur amplitude. Plus celle-ci est élevée, plus

3. Il ne s'agit pas cette fois de la méthode des échelles multiples : nous ne gardons que deux variables indépendantes.

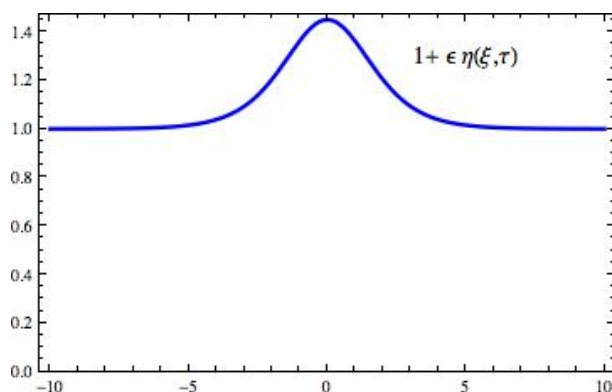


FIGURE 3.8 – Illustration de la solution solitaire (3.90).

vite l'onde se propagera. Il existe en outre des solutions à plusieurs ondes. Zabuski et Kruskal (PRL **15**, 240 (1965)) découvrirent numériquement que de telles ondes peuvent collisionner et retrouver leur forme originale; elles ont donc des attributs de particules. Des ondes solitaires qui possèdent cette robustesse sont appelées *solitons*.

L'équation KdV se rapporte à l'interface de deux fluides; ici : l'eau et l'air. En fait, les conditions dans lesquelles on peut dériver cette équation sont assez fréquentes. Dans l'atmosphère, de fortes variations de températures peuvent délimiter des couches d'air chaud et d'air froid. La différence de densité entre les masses d'air donne ainsi lieu à "deux" fluides avec une interface nette. De même, de fortes variations de salinité sur de courtes variations de profondeur existent dans certaines mers. Ici aussi, une interface nette existe et une équation KdV peut être établie. Dans tous les cas, ces interfaces peuvent former des ondes solitaires, d'amplitude parfois spectaculaire.

Pour aller plus loin dans cette question, consulter :

- P.G. Drazin et R.S. Johnson, *Solitons : an introduction*, Cambridge University Press 1989 –plutôt axé sur l'appareil mathématique utilisé pour décrire les solitons.
- M. Remoissenet, *Waves Called Solitons*, Springer-Verlag 1994 –nombreux exemples physiques et illustrations.

3.2.7 Circulation atmosphérique et océanique

Nous donnons ici quelques éléments de mécanique des fluides sur une sphère en rotation. Un traitement plus détaillé est donné dans le livre de A. Fowler, *Mathematical Geoscience*, Springer-Verlag. Voir également G.K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press.

En définissant la latitude $\lambda = \pi/2 - \theta$, où θ est l'angle polaire usuel en coordonnées sphériques, on a le vecteur unitaire $\mathbf{e}_\lambda = -\mathbf{e}_\theta$. En un point de la surface terrestre, de latitude λ et de longitude φ donné, nous repérons un point à l'aide du trièdre $\mathbf{e}_\varphi(t)$, $\mathbf{e}_\lambda(t)$, $\mathbf{e}_r(t)$ qui tourne à la vitesse angulaire Ω autour de l'axe \mathbf{e}_z . Nous avons

$$\mathbf{x} = x\mathbf{e}_\varphi + y\mathbf{e}_\lambda + (R+h)\mathbf{e}_r, \quad (3.91)$$

où R est le rayon de la Terre, supposée sphérique. La vitesse locale est donnée par

$$\mathbf{v} = u\mathbf{e}_\varphi + v\mathbf{e}_\lambda + w\mathbf{e}_r, \quad (3.92)$$

de sorte que

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \Omega \times \mathbf{x} + \mathbf{v}. \quad (3.93)$$

où les vecteurs $(\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_r)$ tournent à la vitesse Ω . Dans ce repère tournant, les équations d'Euler sont modifiées par l'accélération de Coriolis et l'accélération centrifuge :

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + 2\Omega \times \mathbf{v} + \Omega \times \Omega \times \mathbf{x} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g}, \quad (3.94)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (3.95)$$

Développons (3.94) en composantes :

$$\frac{Du}{Dt} + 2\Omega(-v \sin \lambda + w \cos \lambda) - \Omega^2 x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3.96)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + 2\Omega u \sin \lambda - \Omega^2 \left(y \sin^2 \lambda - \frac{R+h}{2} \sin(2\lambda) \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (3.97)$$

$$\frac{Dw}{Dt} - 2\Omega u \cos \lambda - \Omega^2 \left((R+h) \cos^2 \lambda - \frac{y}{2} \sin(2\lambda) \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial h} - g. \quad (3.98)$$

Les termes centrifuges ci-dessus peuvent être écrits comme le gradient de

$$\frac{-\Omega^2}{2} (x^2 + y^2 \sin^2 \lambda + (R+h)^2 \cos^2 \lambda - (R+h)y \sin(2\lambda)) \quad (3.99)$$

et peuvent dans une certaine mesure être inclus dans p . On a donc, avec une pression corrigée,

$$\frac{Du}{Dt} + 2\Omega(-v \sin \lambda + w \cos \lambda) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3.100)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + 2\Omega u \sin \lambda = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (3.101)$$

$$\frac{Dw}{Dt} - 2\Omega u \cos \lambda = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial h} - g. \quad (3.102)$$

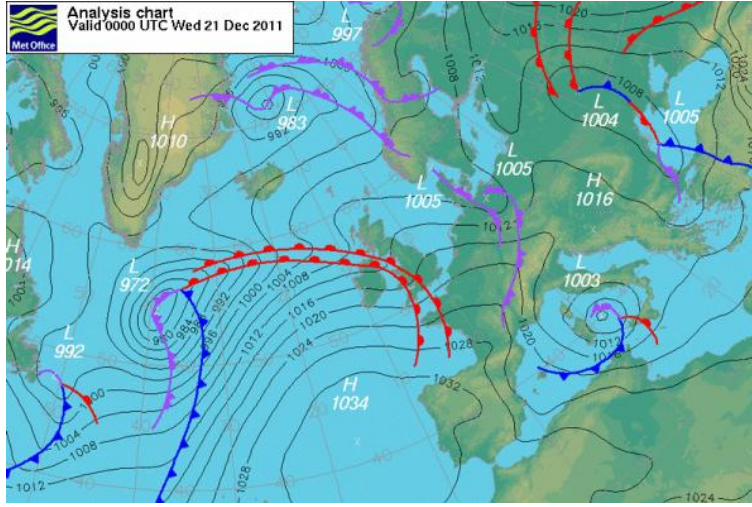


FIGURE 3.9 – Carte météo du 21/12/11. Un temps doux pour la saison, mais passablement mauvais. Les lignes rouges et bleues désignent les fronts chauds et froids, respectivement, et sont perpendiculaires au courant. Image prise sur le site www.metoffice.gov.uk

Ces équations doivent être complétées par une équation de bilan d'énergie telle que (2.30).

Etant donnée une taille caractéristique $L \approx 1000\text{km}$ du courant atmosphérique dans les directions horizontales, une épaisseur $h_0 \approx 10\text{km}$ et une vitesse de l'ordre de $V \approx 50\text{km/h}$, le changement de variable

$$(x, y) = L(x', y'), \quad h = h_0 h', \quad (u, v) = V(u', v'), \quad w = \frac{h_0 V}{L} w', \quad (3.103)$$

permet de supposer que les grandeurs sans dimension x', y', h', u', v' , et w' sont toutes d'ordre un. L'échelle de vitesse verticale $h_0 V/L$ est justifiée en supposant que le temps pour couvrir une distance L horizontalement est comparable au temps nécessaire pour couvrir une distance h_0 verticalement. Dans les équations du mouvement horizontales, les membres de gauche peuvent alors s'écrire

$$2\Omega L \left(R_O \frac{Du'}{Dt'} - v' \sin \lambda + \frac{h_0}{L} w' \cos \lambda \right), \quad 2\Omega L \left(R_O \frac{Dv'}{Dt'} + u' \sin \lambda \right), \quad (3.104)$$

où

$$R_O = \frac{V}{2\Omega L} \quad (3.105)$$

est le nombre de Rossby. Pour les ordres de grandeur évoqués plus haut, ($\Omega = 2\pi/(24\text{h})$), on a $R_O \approx 0.1$. Par ailleurs, $h_0/L \ll 1$. On peut donc

négliger en première approximation les termes d'advection, $\frac{D}{Dt}(u, v)$, et w dans les équations du mouvement horizontales. Celles-ci se réduisent à

$$v \sim -\frac{1}{2\Omega\rho \sin \lambda} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad u \sim -\frac{1}{2\Omega\rho \sin \lambda} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (3.106)$$

Ainsi, en première approximation, $(u, v) \cdot (\partial p / \partial x, \partial p / \partial y) = 0$ et l'écoulement se fait le long des isobares, contrairement à l'intuition habituelle. Un tel écoulement est appelé *géostrophique*. Dans l'hémisphère nord, $\sin \lambda > 0$. Par conséquent, le courant tourne dans le sens des aiguilles d'une montre autour des zones de haute pression (anticyclone) et dans le sens inverse autour des zones de basse pression (cyclone), voir Fig. 3.9.

Les développements ci-dessus sont aussi vrais pour les courants marins, à partir du moment où $R_O \ll 1$.

3.3 Écoulements visqueux

Nous avons déjà noté que la viscosité était associée à la dissipation. Cela est particulièrement visible, si on considère l'équation de la vorticité qui, de (3.16), devient (nous supposons $\text{div } \mathbf{v} = 0$ dans toute cette section)

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}, \quad (3.107)$$

et si $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{0}$, on voit que les composantes cartésiennes de $\boldsymbol{\omega}$ se diffusent à la manière d'une température. On remarque en particulier que la vorticité n'est pas créée ou atténuée par les forces de pression, mais uniquement par la viscosité.

3.3.1 Équations de Stokes, Équations de Oseen

Comme expliqué précédemment, pour les écoulements lents, $R \ll 1$, on a, en variables réduites, les équations de Stokes :

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla p, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (3.108)$$

En particulier, on déduit d'une part que

$$\nabla^2 p = 0. \quad (3.109)$$

Ainsi, si la pression est donnée aux bords de l'écoulement étudié, on peut résoudre (3.109) directement et déduire \mathbf{v} par l'équation de Stokes. À l'inverse, en prenant le rotationnel de l'équation de Stokes, on trouve

$$\text{rot}^3 \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (3.110)$$

qui est indépendant de p . Si le champ de vitesse est spécifié aux bords, on peut résoudre (3.110) directement et voir (3.108) comme une équation pour p . Notons aussi que la solution de (3.108) est indéterminée, à un écoulement uniforme $\mathbf{V}(t)$ près.

Difficulté posée par les grands domaines

Malgré leur succès pour décrire un grand nombre d'écoulements lents, il existe des écoulements non modélisables par (3.108), notamment lorsque les conditions aux bords sont imposées à grande distance, c.à.d. dans des domaines de taille au moins $O(1/R)$. Si, par exemple, on veut décrire un écoulement lent autour d'un obstacle avec, à l'infini, la condition $\mathbf{v} = V\mathbf{e}_x$, il faut modifier les équations de Stokes par les équations d'Oseen :

$$RV \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (3.111)$$

On peut s'étonner du fait que des termes réputés aussi petits que le membre de gauche ci-dessus puissent jouer un rôle important. À cet égard, l'exemple mathématique suivant est éclairant.

Soit à résoudre l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + R \frac{du}{dx} = 0, \quad R \ll 1, \quad \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} = 1, \quad u(\infty) = V. \quad (3.112)$$

La solution peut être écrite exactement : $u = V - e^{-Rx}/R$. Si, par contre, on met directement $R = 0$ dans (3.112), alors, on obtient l'approximation $u' = A + x$ et on se trouve dans l'impossibilité de satisfaire la condition $u' \rightarrow V$ à l'infini. Le terme $R \frac{du}{dx}$ est donc indispensable pour résoudre le problème et c'est une situation analogue à celle que l'on rencontre avec (3.111), lorsque des conditions sont imposées à l'infini. D'un point de vue technique, cette difficulté se résout par la considération d'une "couche limite" à l'infini, mais nous n'entrerons pas dans ces détails ici. Bien que l'équation d'Oseen ait été proposée en 1910, ce n'est qu'à la fin des années '50, avec l'élaboration des techniques modernes d'analyse asymptotique, que sa validité a été comprise.

3.3.2 Écoulements à 2D - fonction de courant

On rencontre fréquemment des écoulements à 2D. Dans ce cas, on peut résoudre directement la condition d'incompressibilité

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (3.113)$$

en introduisant la *fonction de courant* ψ , telle que $v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, càd. $\mathbf{v} = \text{rot}(0, 0, \psi)$. Dans ce cas, (3.110) devient

$$\nabla^2 (\nabla^2 \psi) = \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \equiv \nabla^4 \psi = 0, \quad (3.114)$$

ou *équation biharmonique*. La fonction de courant est constante sur une ligne de courant : en effet, $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \psi = 0$. La fonction ψ est donc particulièrement utile pour visualiser les écoulements.

Une autre situation effectivement à 2D est celle à symétrie cylindrique. Dans ce cas, on peut poser, en coordonnées cylindriques

$$\mathbf{v} = \text{rot} \left(\frac{\psi(\rho, z)}{\rho} \mathbf{e}_\phi \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \mathbf{e}_z, \quad (3.115)$$

où \mathbf{v} sera automatiquement à divergence nulle. De plus, on observe que

$$\text{rot}^2 \left(\frac{\psi(\rho, z)}{\rho} \mathbf{e}_\phi \right) = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \mathbf{e}_\phi, \quad (3.116)$$

et par conséquent, $\text{rot}^3 \mathbf{v} = 0$ donne

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 \psi = 0, \quad v_\rho = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho}. \quad (3.117)$$

On peut aussi utiliser les coordonnées cylindriques dans la dernière équation, en posant $z = r \cos \theta$, $\rho = r \sin \theta$, ce qui donne

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 \psi = 0, \quad v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = \frac{-1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (3.118)$$

Écoulement à l'intérieur d'une sphère

On suppose que le rayon a est constant et qu'en celui-ci, $v_r = 0$. On pourrait déduire de l'expression de v_r dans (3.118) que, nécessairement ψ est indépendant de θ , mais dans ce cas, v_θ diverge aux pôles. Il est plus commode de supposer que $\psi = f(r) \sin^2 \theta$, avec $f(a) = 0$. L'équation pour ψ se simplifie en

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \right)^2 f = 0, \quad \rightarrow \quad f = Ar^4 + Br^2 + Cr + Dr^{-1} \quad (3.119)$$

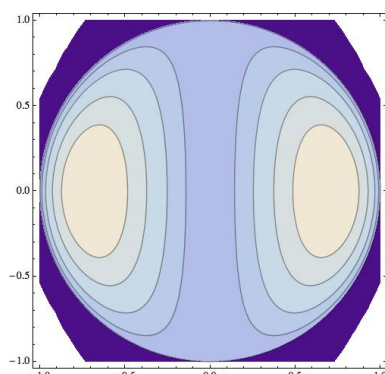


FIGURE 3.10 – Circulation à l'intérieur d'une goutte, d'après (3.120).

Afin d'empêcher la présence de singularité dans \mathbf{v} à l'intérieur de la sphère, il faut imposer $C = D = 0$; de plus, $f(a) = 0$ donne, en définitive,

$$\psi = \frac{V}{2} \left(r^2 - \frac{r^4}{a^2} \right) \sin^2 \theta. \quad (3.120)$$

Cette solution porte le nom de Hill's spherical vortex et est illustrée en figure 3.10. Elle permet de décrire la circulation à l'intérieur d'une goutte de fluide –bulle d'air dans l'eau, goutte d'huile en suspension.

3.3.3 Théorie de la lubrification

Cette section concerne une classe importante d'écoulements, ceux compris dans un espace fin : film liquide coulant le long d'une paroi, film d'huile entre deux pièces d'outil, air emprisonné entre une feuille de papier et la table sur laquelle elle glisse, larmes à la surface des yeux. Comme toujours, pour préciser la notion de finesse, nous procédons à une remise à l'échelle des variables. Supposons que les dimensions latérales soient d'ordre L et que dans la direction de confinement, z , les longueurs soient d'ordre h_0 . Le rapport d'aspect, $\delta = h_0/L$ sera supposé petit. Soit donc

$$(x, y, z) = L(x', y', \delta z'), \quad (v_x, v_y, v_z) = V(v'_x, v'_y, \delta v'_z), \quad p = Pp', \quad t = \frac{L}{V} t' \quad (3.121)$$

où la normalisation de v_z a été choisie de manière à garder le maximum de termes dans $\text{div } \mathbf{v}$ à l'ordre dominant. En procédant comme en Sec. 3.1, on

trouve (en omettant les primes)

$$\frac{Dv_x}{Dt} = \frac{P}{\rho V^2} \left(\frac{\rho g_x L}{P} - \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \quad (3.122)$$

$$\frac{Dv_y}{Dt} = \frac{P}{\rho V^2} \left(\frac{\rho g_y L}{P} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right), \quad (3.123)$$

$$\frac{Dv_z}{Dt} = \frac{P}{\delta^2 \rho V^2} \left(\frac{\rho g_z h_0}{P} - \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right), \quad (3.124)$$

ou $R = \frac{VL}{\nu}$. La condition d'incompressibilité reste

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (3.125)$$

Pour équilibrer les gradients de pression et les effets visqueux dans les deux premières équations, nous imposons

$$\frac{P}{\rho V^2} = \frac{1}{\delta^2 R}. \quad (3.126)$$

Ainsi, la pression est un facteur $1/\delta^2$ plus grand que dans (3.7). Cela est dû au confinement dans la direction z , qui entraîne des gradients de vitesse plus importants que dans le cas d'un écoulement visqueux habituel. En ne retenant que les termes dominants, on a donc

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial x} - \mathcal{G}_x + O(\delta^2) \quad (3.127)$$

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial y} - \mathcal{G}_y + O(\delta^2) \quad (3.128)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mathcal{G}_z + O(\delta^4), \quad (3.129)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (3.130)$$

avec

$$\mathcal{G}_x = \frac{\rho g_x L}{P}, \quad \mathcal{G}_y = \frac{\rho g_y L}{P}, \quad \mathcal{G}_z = \frac{\rho g_z h}{P}. \quad (3.131)$$

Suivant les cas, $\mathcal{G}_{x,y,z}$ seront négligeables ou non. Si le mouvement des parois impose la vitesse V , on peut souvent négliger la gravité. Par contre, lorsque la gravité est responsable de l'écoulement, au moins un des \mathcal{G}_i est d'ordre 1, ce qui, par (3.126), détermine l'échelle des vitesse V .

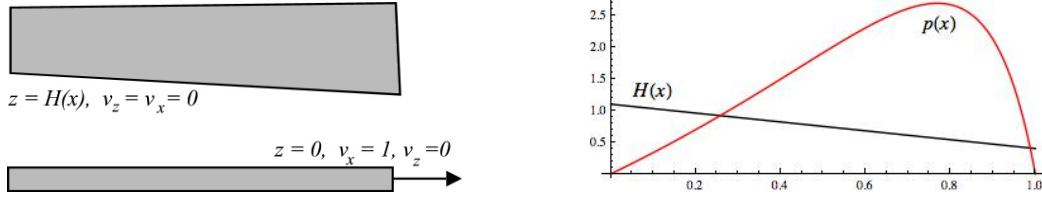


FIGURE 3.11 – Couche de lubrification entre deux surfaces en mouvement relatif (variables réduites). Figure de droite, solution $p(x)$ de (3.135) pour $H = 1 - 0.7x$.

Application 1 : deux surfaces en mouvement relatif.

Soit la situation décrite en Fig. 3.11, où deux parois séparées par un film mince sont en mouvement relatif. Nous allons calculer l'écoulement et la distribution de pression entre les deux surfaces. Nous négligeons \mathcal{G}_x , \mathcal{G}_y , ainsi que \mathcal{G}_z , car l'écoulement n'est manifestement pas dû à la gravité. Nous avons bien sûr aussi, $v_y = 0$.

étape 1 : Par (3.129), $\partial p / \partial z = 0$ et nous avons $p = p(x)$.

étape 2 : Comme p ne dépend pas de z , (3.127) s'intègre aisément et donne, compte tenu des conditions au bord (Fig. 3.11),

$$v_x = \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} z(z - h) + 1 - \frac{z}{H} \quad (3.132)$$

étape 3 : On intègre l'équation de continuité sur l'épaisseur de la couche mince :

$$\int_0^{H(x)} \frac{\partial v_x}{\partial x} dz = 0. \quad (3.133)$$

En appliquant le théorème de Leibniz pour la dérivée des intégrales à bornes d'intégration variables, on déduit

$$\int_0^{H(x)} \frac{\partial v_x}{\partial x} dz = \frac{d}{dx} \int_0^{H(x)} v_x dz - \frac{dH}{dx} v_x \Big|_{z=H(x)} = 0. \quad (3.134)$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{6} \frac{d}{dx} \left(H^3 \frac{dp}{dx} \right) = \frac{dH}{dx}. \quad (3.135)$$

Il s'agit de l'équation de Reynolds et si $H(x)$ est donné, de même que p aux bords du domaine, on peut calculer p et donc \mathbf{v} dans le film.

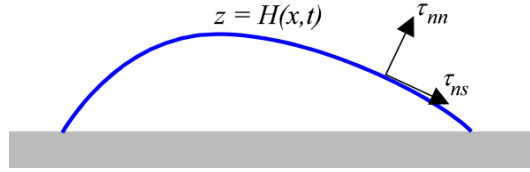


FIGURE 3.12 – Étalement d'une goutte sous l'effet de la gravité.

Application 2 : étalement d'un film.

Considérons ensuite la situation représentée à la Fig. 3.12. Pour simplifier, nous supposons que l'écoulement est 2D, càd. $\mathbf{v} = (v_x, 0, v_z)$. Le moteur de l'écoulement est la gravité ; celle-ci doit donc entrer dans nos équations. Si le plan d'étalement de la goutte est horizontal, $\mathcal{G}_{x,y} = 0$ et on choisit $P = \rho g h_0$ pour avoir $\mathcal{G}_z = -1$ et on a $V = \sqrt{g h_0}$ (comme dans les "shallow water equations", de l'exercice 3.4). Par ailleurs, en $z = H(x)$, on a

$$\tau_{nn} = -p = \mathcal{T} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \quad \tau_{ns} = \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0, \quad v_z = \frac{\partial H}{\partial t} + v_x \frac{\partial H}{\partial x} = 0. \quad (3.136)$$

Dans la première condition ci-dessus, $\mathcal{T} = \gamma / (\rho g L^2) = \lambda_c^2 / L^2$ est la tension de surface normalisée. Par ailleurs, en vertu de la faible pente de H et de (3.121), on a utilisé $\mathbf{n} \approx (0, 0, 1)$ et $\frac{\partial v_z}{\partial x} \ll \frac{\partial v_x}{\partial z}$. D'autre part, en $z = 0$, on a la condition de non glissement $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

étape1 : Par (3.129) et (3.136), on a

$$p = H - z - \mathcal{T} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}. \quad (3.137)$$

étape2 : Par (3.127) et les conditions en $z = 0, H$, on a

$$v_x = -\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} z (2H - z), \quad (3.138)$$

$\frac{\partial p}{\partial x}$ étant indépendant de z .

étape3 : En intégrant $\text{div } \mathbf{v}$ sur l'épaisseur de la goutte, et en tenant compte de la condition cinématique, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{H(x,t)} v_x \, dz + \frac{\partial H}{\partial t} &= 0, \\ \rightarrow \frac{\partial H}{\partial t} &= \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(H^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right), \\ \rightarrow \frac{\partial H}{\partial t} &= \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(H^3 \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \mathcal{T} \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.139)$$

On a ainsi une équation d'évolution pour H et on vérifie sans peine qu'une solution à long terme est

$$H = A [\cosh (\mathcal{T}^{-1/2} x) - \cosh (\mathcal{T}^{-1/2})], \quad (3.140)$$

càd., dimensionnellement,

$$H = A [\cosh (x/\lambda_c) - \cosh (L/\lambda_c)], \quad (3.141)$$

Pour déterminer A et L ci-dessus, il faut utiliser le volume de fluide dans le film et invoquer une condition de contact en $x = L$, où $H = 0$. Cette dernière condition dépend de la nature du fluide et de la surface sur laquelle il se répand. On peut, par exemple, prescrire l'angle de contact avec la surface, à condition cependant que cet angle soit compatible avec une faible pente de H . Ce dernier point de théorie peut varier considérablement d'une situation à l'autre et doit faire l'objet d'une attention particulière.

3.3.4 Percolation

Nous terminons la discussion des écoulements visqueux par le cas des écoulements dans les milieux poreux : terre, sable et autres géométries trop complexes pour être décrites et étudiées complètement. Si les interstices par lesquels le fluide passe sont suffisamment petits, le nombre de Reynolds est petit, localement, et les effets d'inertie sont négligeables. Ensuite, sur base de solutions du type (3.132) et par expérience, on postule la *loi de Darcy*

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\mu} \nabla p, \quad (3.142)$$

où k est la perméabilité du milieu. Dans cette expression, \mathbf{v} et p doivent être compris comme des valeurs moyennes sur un grand nombre de pores ou d'interstices. En combinant cette loi avec la conservation de la masse, on trouve

$$\nabla^2 p = 0. \quad (3.143)$$

À une paroi imperméable, on aura bien sûr $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$. À une frontière libre, séparant une zone imbibée de fluide d'une zone sèche, on aura $p = 0$, et une relation cinématique modifiée du type $v_z = \phi \frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x}$, où le coefficient ϕ est la fraction volumique accessible au fluide.

Un grand nombre de problèmes pratiques se résolvent grâce à ces équations.

3.4 Ondes élastiques

3.4.1 Ondes S et P

Rappelons les équations de Navier, en l'absence de forces de volume :

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (3.144)$$

Cherchons des solutions de type onde plane, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$, où \mathbf{u}_0 est le vecteur de polarisation de l'onde, \mathbf{k} le vecteur d'onde et ω la pulsation. Par substitution dans (3.144),

$$\rho \omega^2 \mathbf{u}_0 = (\lambda + \mu) \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0) + \mu k^2 \mathbf{u}_0. \quad (3.145)$$

Par ailleurs, il est aisé de voir que la polarisation peut se décomposer selon les directions parallèle et transverses à \mathbf{k} : $\mathbf{u}_0 = k^{-1} \mathbf{k} u_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp}$, où $u_{\parallel} = k^{-1} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{k}$ et $\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u}_0 - k^{-1} \mathbf{k} u_{\parallel}$. En substituant cette décomposition ci-dessus, l'équation se découple

$$(\rho \omega^2 - (\lambda + 2\mu) k^2) u_{\parallel} = 0, \quad (\rho \omega^2 - \mu k^2) \mathbf{u}_{\perp} = 0, \quad (3.146)$$

et fait apparaître *deux* vitesses de phase et donc deux types d'onde.

1. **Les ondes P** ou "parallèles" ou "primaires" ou "de pression", dont la polarisation est parallèle au vecteur d'onde et qui ont la vitesse

$$c_p = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}. \quad (3.147)$$

Il faut noter que ces ondes sont à divergence non nulle ($\text{div } \mathbf{u} = i \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} \neq 0$); elles véhiculent donc un changement de volume, càd. une compression du milieu, comme les ondes acoustiques vues en Ex. 3.2.

2. **Les ondes S** ou "de cisaillement" ou "transverses" ou "secondaires", de vitesse

$$c_s = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2}. \quad (3.148)$$

Ces ondes sont à divergence nulle, mais à rotationnel non nul.

Remarquons que ces ondes ne sont pas dispersives. Généralement, une onde sera une combinaison d'ondes P et S. Il est certes possible de ne générer qu'une onde d'un certain type. Ainsi, en faisant détoner un explosif enfoui dans le sol (expérience de géophysique), on génère principalement une onde P. Cependant, comme nous allons le voir, dès que cette onde rencontrera un obstacle ou une discontinuité, une composante S sera inévitablement produite.

3.4.2 Réfraction et réflexion

Soit dans le plan $x = 0$, l'interface entre deux milieux de constantes élastiques différentes et soit une onde de type P venant de $x < 0$,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{inc}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \exp\left\{i[k_p(x \cos \alpha + y \sin \alpha) - \omega t]\right\}, \quad (3.149)$$

où $k_p = \omega/c_p$ et α est l'angle d'incidence. Il nous faut trouver l'onde réfléchie $\mathbf{u}_{\text{reflec}}$ et réfractée $\mathbf{u}_{\text{refrac}}$ telle que $\mathbf{u}_{\text{inc}} + \mathbf{u}_{\text{reflec}} = \mathbf{u}_{\text{refrac}}$ en $x = 0$ et que $(\tau_{xx}, \tau_{yx}, \tau_{zx})$ soit continu à l'interface.

Pour que ces conditions soient réalisées en permanence, il faut que la pulsation des ondes réfléchies et incidentes soit aussi ω . D'autre part, vu le caractère vectoriel des conditions de continuité en $x = 0$, on se rend rapidement compte qu'il faut en toute généralité poser $\mathbf{u}_{\text{reflec}}$ et $\mathbf{u}_{\text{refrac}}$, une combinaison d'ondes P et S (voir Fig. 3.13) :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{reflec}} = r_p \begin{pmatrix} -\cos \gamma \\ \sin \gamma \end{pmatrix} \exp\left\{i[k_p(-x \cos \gamma + y \sin \gamma) - \omega t]\right\} \\ + r_s \begin{pmatrix} \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix} \exp\left\{i[k_s(-x \cos \beta + y \sin \beta) - \omega t]\right\}, \end{aligned} \quad (3.150)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{refrac}} = t_p \begin{pmatrix} \cos \xi \\ \sin \xi \end{pmatrix} \exp\left\{i[k'_p(x \cos \xi + y \sin \xi) - \omega t]\right\} \\ + t_s \begin{pmatrix} \sin \zeta \\ -\cos \zeta \end{pmatrix} \exp\left\{i[k'_s(x \cos \zeta + y \sin \zeta) - \omega t]\right\}, \end{aligned} \quad (3.151)$$

où

$$k_s = \frac{\omega}{c_s}, \quad k'_p = \frac{\omega}{c'_p}, \quad k'_s = \frac{\omega}{c'_s}. \quad (3.152)$$

En comparant les expressions (3.149), (3.150) et (3.151) en $x = 0$, on voit que, quelles que soient les relations à l'interface, il faut

$$k_p \sin \alpha = k_p \sin \gamma = k_s \sin \beta = k'_p \sin \xi = k'_s \sin \zeta \quad (3.153)$$

pour qu'elles soient satisfaites pour tout y . On a donc réflexion spéculaire pour l'onde P, c.à.d. $\gamma = \alpha$, et

$$\boxed{\frac{\sin \alpha}{c_p} = \frac{\sin \beta}{c_s} = \frac{\sin \xi}{c'_p} = \frac{\sin \zeta}{c'_s}}, \quad (3.154)$$

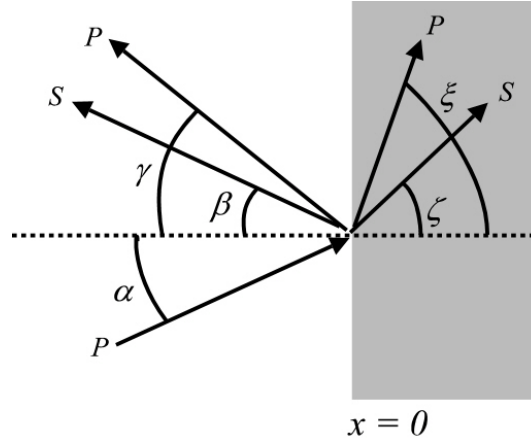


FIGURE 3.13 – Incidence et réflexion d’une onde P en une interface rigide.

relations que nous encadrons pour en souligner la généralité.⁴ Nous remarquons immédiatement que, comme $c_s < c_p$, $\beta < \alpha$. Par ailleurs, si le milieu en $x > 0$ est plus rigide, on a $c_p < c'_p$ et il existe un angle limite d’incidence α pour lequel l’onde réfractée P est absente. Enfin, dans la limite où $\mu', \lambda' \gg \mu, \lambda$, on a $c'_p, c'_s \gg c_p, c_s$ et la réflexion est totale : $\mathbf{u}_{\text{refrac}} = \mathbf{0}$. Dans ce cas particulier,

$$r_p = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}, \quad r_s = -\frac{\sin(2\alpha)}{\cos(\alpha - \beta)}. \quad (3.155)$$

3.4.3 Ondes de Rayleigh

Il s’agit ici d’ondes qui se propagent le long d’une frontière libre. Ces ondes sont notamment produites lors de tremblements de terre (Fig. 3.14). Soit la frontière libre donnée par $y = 0$. En celle-ci, on a

$$\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = 0. \quad (3.156)$$

Cherchons une solution de la forme d’une combinaison d’ondes S et P

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}_p e^{\kappa_p y} + \mathbf{u}_s e^{\kappa_s y}) \exp\{i(kx - \omega t)\}, \quad (3.157)$$

4. La loi de réfraction correspondante en optique est la loi Snell.

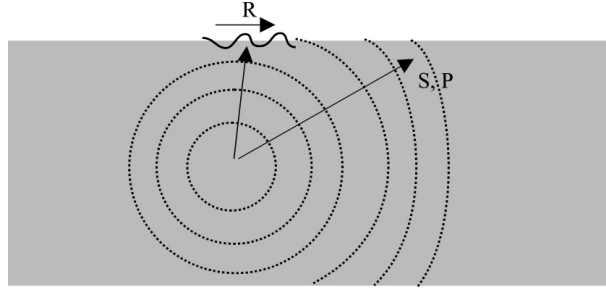


FIGURE 3.14 – Ondes S, P, et de Rayleigh.

où la dépendance en y est choisie de manière à assurer la location de l'onde en $y = 0$. En vertu des relations de dispersion établies précédemment, on a

$$\kappa_p^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_p^2}, \quad \kappa_s^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2}. \quad (3.158)$$

Par ailleurs, $\mathbf{u}_p = a_p(k, -i\kappa_p)^T$ et $\mathbf{u}_s = a_s(\kappa_s, -ik)^T$. Aussi, (3.156) donne

$$2k\kappa_p a_p + (k^2 + \kappa_s^2) a_s = 0, \quad (3.159)$$

$$(c_p^2(\kappa_p^2 - k^2) + 2c_s^2 k^2) a_p + 2c_s^2 k \kappa_s a_s = 0. \quad (3.160)$$

Pour avoir une solution non triviale de ce système algébrique, il faut que son déterminant soit nul, càd. que

$$k^4(c_p^2 - 2c_s^2) + k^2(2c_s^2(2\kappa_p - \kappa_s)\kappa_s + c_p^2(\kappa_s^2 - \kappa_p^2)) - c_p^2\kappa_p^2\kappa_s^2 = 0. \quad (3.161)$$

On en déduit finalement l'équation pour la vitesse de l'onde, $c = \omega/k$,

$$\left(2 - \frac{c^2}{c_s^2}\right)^2 = 4 \left(1 - \frac{c^2}{c_p^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{c^2}{c_s^2}\right)^{1/2}. \quad (3.162)$$

Cette équation possède une solution réelle unique $c < c_s < c_p$, comme on peut s'en convaincre graphiquement. De plus, c est indépendant de k et les ondes de Rayleigh sont donc elles aussi non dispersives.

Exercices Chapitre 3 -I

3.1 Montrez que pour des transformations isentropiques,

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \nabla \frac{p}{\rho}$$

3.2 Montrez par linéarisation de (2.48) et (2.49) autour de $\mathbf{v} = \mathbf{0}, p = p_0, \rho = \rho_0$, que la déviation de la pression \tilde{p} autour de son point d'équilibre satisfait l'équation

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \tilde{p}, \quad c^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0},$$

ce qui démontre l'existence d'ondes acoustiques à la vitesse c .

3.3 Considérez ensuite des petites déviations *stationnaires* autour de $\mathbf{v} = V \mathbf{e}_x, p = p_0, \rho = \rho_0$ et montrez que dans ce cas

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial z^2} = 0,$$

où $M = V/c$. Que se passe-t-il de spectaculaire à $M = 1$?

3.4 Soit $\mathbf{v} = (u, v)$ le champ de vitesse à 2D d'un écoulement en eau peu profonde (inviscible et incompressible). Formalisez ce fait en mettant les équations sans dimension sur base d'une longueur caractéristique L et d'une vitesse caractéristique V dans la direction x et en supposant que $h \ll L$ (cf Fig. 2.2). Justifiez le choix $V = \sqrt{gh_0}$, où h_0 est la profondeur de référence et montrez que dans ce cas (en variables réduites),

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

("shallow water equations")

3.5 Soit la relation de dispersion $\omega = \omega(k)$.

(a) Montrez que la figure de battement produite par la superposition de deux ondes sinusoidales de nombres d'onde k et $k + k'$ ($k' \ll k$) se propage à la vitesse de groupe $\frac{\partial \omega}{\partial k}$.

(b) Plus généralement, considérez un paquet d'onde

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk,$$

où le spectre $f(k)$ est supposé concentré autour d'une fréquence k_0 . Pour les temps longs, c.à.d. pour $t = T/\epsilon, x = X/\epsilon, \epsilon \ll 1$, et en

supposant que la largeur du spectre est de l'ordre de ϵk_0 , montrez qu'on peut développer l'argument de l'exponentielle en séries de Taylor au premier ordre, donnant

$$f(x, t) \sim e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(k') e^{ik'(x - \frac{\partial \omega}{\partial k} t)} dk', \quad k' = k - k_0,$$

avec $F(k') = f(k_0 + k')$ et faites le lien avec le point précédent.

- (c) Montrez enfin que pour les temps très long, $t = \tau/\epsilon^2$, il faut développer l'argument de l'exponentielle au deuxième ordre au moins :

$$f(x, t) e^{-i(k_0 x - \omega(k_0)t)} = A \sim \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(k') e^{ik'(x - \frac{\partial \omega}{\partial k} t) - i \frac{k'^2}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} t} dk',$$

et que cela correspond, avec le changement de variables $x \rightarrow \tilde{x} = x - \frac{\partial \omega}{\partial k} \Big|_{k_0} t$, $t \rightarrow t$, à

$$i \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \Big|_{k_0} \frac{\partial^2 A}{\partial \tilde{x}^2} = 0.$$

- 3.6 (a) Montrez que la transformée de Fourier

$$\hat{\psi}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi) e^{-ik\xi} d\xi$$

d'une courbe gaussienne $\psi(\xi) = e^{-\xi^2}$ est donnée par $\hat{\psi}(k) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-k^2/4}$.

- (b) Montrez que la solution de l'équation paraxiale $i\psi_\tau + \frac{1}{2}\psi_{\xi\xi} = 0$ avec $\psi(\xi, 0) = e^{-\xi^2}$ est donnée par

$$\psi(\xi, \tau) = \frac{e^{-\xi^2/(1+2i\tau)}}{\sqrt{1+2i\tau}}.$$

[Rappel 1 : $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}$,

Rappel 2 (analyse complexe) : l'intégrale d'une fonction analytique le long d'un chemin dans le plan complexe ne dépend que des extrémités de ce chemin -pas du chemin lui-même.]

- 3.7 Montrez que la solution $|\psi| = \text{const}$ de $i\psi_\tau + \frac{1}{2}\psi_{\xi\xi} + |\psi|^2\psi = 0$ est de la forme $\psi = A \exp i(A^2\tau - B^2/2\tau + B\xi)$. En supposant $B = 0$, étudiez l'évolution de $\psi = (A + \epsilon u(\xi, \tau)) \exp i(A^2\tau + \epsilon\phi(\xi, \tau))$, par un calcul au premier ordre en ϵ (calcul linéaire). Montrez que la forme perturbée ci-dessus est équivalente à $\psi = [A + \epsilon(u(\xi, \tau) + iv(\xi, \tau))] \exp i(A^2t)$. Une fois établies les équations pour u et v , étudiez l'évolution dans le temps de perturbations u et v proportionnelles à $\cos \Omega\xi$.

Exercices Chapitre 3 -II

3.8 Montrez que pour $\delta^2\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$ et $\varphi_y|_{y=0} = 0$, on a

$$\varphi(x, y, t) = \varphi_0(x, t) + \delta^2 \left(\varphi_2(x, t) - \frac{y^2}{2} \varphi_{0,xx}(x, t) \right) + \dots$$

3.9 Reprenez le calcul de la section 3.2.4 avec $\gamma = 0$ pour un domaine de profondeur finie h en imposant la condition au bord $\varphi_y = 0$ en $y = -h$ (pourquoi?). Montrez que dans ce cas, la relation de dispersion devient

$$\omega^2 = gk \tanh kh,$$

et que la vitesse maximale est donnée par \sqrt{gh} . Quelle est la vitesse d'un tsunami de longueur d'onde 30km dans un océan de profondeur 5000m? Que pouvez-vous dire sur la dispersion à de telles longueurs d'ondes et quelles conclusions pratiques en tirez-vous?

3.10 Cherchez une solution de (3.89) sous la forme $u(\zeta)$, où $\zeta = \xi - c\tau$. Montrez qu'on peut intégrer l'équation de KdV successivement pour finalement obtenir

$$\frac{1}{2}u'^2 = -u^3 + \frac{c}{2}u^2 + Au + B.$$

Déterminez A et B en fonction des conditions aux limites et intégrez si vous pouvez.

3.11 Résolvez l'équation de Reynolds (3.135) pour $H(x) = 1 - \lambda x$ avec les conditions aux bord $p = p_0$, $x = 0, 1$. Montrez que

$$p = p_0 + \frac{6\lambda x(1-x)}{(2-\lambda)(1-\lambda x)^2}$$

et que la charge totale supportée par la face $H(x)$ est

$$\frac{6}{\lambda^2} \left(\log \frac{1}{1-\lambda} - \frac{2\lambda}{2-\lambda} \right)$$

3.12 On peut modéliser un glacier comme un fluide très visqueux coulant sous son propre poids. En modélisant l'accumulation de neige à la surface du glacier par un flux de matière constant q , justifiez le modèle sans dimension

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{3} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + 1.$$

Réécrivez-le en dimensions.

- 3.13 Explicitez en termes de u_x, u_y, u_z les conditions générales de continuité entre deux milieux élastiques séparés par le plan $x = 0$.
- 3.14 Soit une onde P incidente en une surface de discontinuité avec un angle α par rapport à la normale. En supposant $c'_p, c'_s > c_p$, donnez les angles α_p et α_s auquel les ondes réfractées P et S disparaissent. Montrez que $\alpha_p < \alpha_s$ et, pour $\alpha_s < \alpha$, montrez que

$$r_p = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}, \quad r_s = -\frac{\sin(2\alpha)}{\cos(\alpha - \beta)},$$

où β est l'angle de réflexion de l'onde S.

- 3.15 On étudie le niveau d'une nappe phréatique, $(0, 0, -h(x, y))$ en présence d'un puit que l'on modélise par un point d'extraction de fluide en $(0, 0, -H)$, avec $H \gg h$. Faites un schéma du problème. Justifiez la loi de Darcy modifiée

$$\mathbf{v} = \nabla\phi, \quad \phi = -\frac{k}{\mu}(p + \rho gz),$$

avec les conditions au bord $\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0$, $\phi = \frac{k\rho gh}{\mu}$ en $z = -h$. Expliquez pourquoi, près du point où l'eau est puisée dans la nappe, $(0, 0, -H)$,

$$\phi \approx \frac{q}{4\pi(x^2 + y^2 + (z + H)^2)^{1/2}}.$$

Quel est la signification de q ? Enfin, montrez que

$$h \approx \frac{q\mu}{2\pi k\rho g(x^2 + y^2 + H^2)^{1/2}}.$$

(le cours d'électrostatique peut être utile pour cet exercice).

Chapitre 4

Théories approchées de l'élasticité

Dans ce chapitre, nous ne traiterons que des déplacements ; comme il n'y a pas de risque de confusion avec le champ de vitesse, nous écrirons donc

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

4.1 Cordes et membranes

Une corde, comme une membrane, est toujours en tension, (ex : guitare). On les suppose toutes deux incapables de soutenir une compression ou un cisaillement. Dans le cas d'une corde, on suppose le déplacement purement normal à l'axe : $\mathbf{u} = w\mathbf{e}_z$. Considérons l'élément de corde de longueur δx représenté en Fig. 4.1. La force verticale exercée sur cet élément est $-F$ et par un simple argument de similitude géométrique, cela vaut $-T\delta x/R$, où T est la tension dans la corde et R est le rayon de courbure. Ainsi,

$$\rho \delta x \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -T \frac{\delta x}{R}, \quad (4.2)$$

où $[\rho] = \text{kg/m}$ et $[T] = \text{N}$. Notons que le membre de droite est aussi

$$\left. \frac{T w_x}{\sqrt{1 + w_x^2}} \right|_{x+\delta x/2} - \left. \frac{T w_x}{\sqrt{1 + w_x^2}} \right|_{x-\delta x/2} \sim \delta x \frac{T w_{xx}}{(1 + w_x^2)^{3/2}}. \quad (4.3)$$

On a donc

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{T w_{xx}}{(1 + w_x^2)^{3/2}}, \quad (4.4)$$

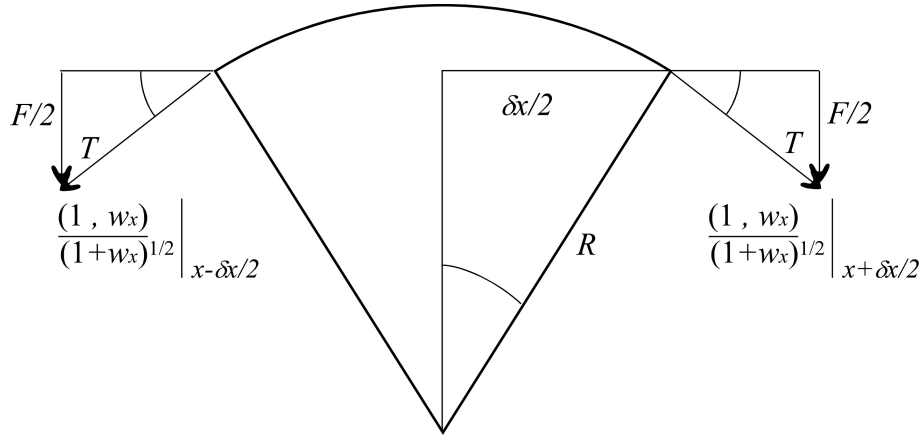


FIGURE 4.1 – Bilan des forces pour une corde en tension.

où l'on a retrouvé la formule de la courbure

$$\kappa = \frac{-1}{R} = \frac{w_{xx}}{(1 + w_x^2)^{3/2}}. \quad (4.5)$$

On peut couramment supposer que $\partial w / \partial x \ll 1$ et ainsi obtenir l'équation d'onde familière

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (4.6)$$

Enfin, dans le cas où une force par unité de longueur f est appliquée transversalement à la corde, le bilan des forces donne

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f. \quad (4.7)$$

L'argument se généralise sans peine à 2D pour une membrane, cf. Fig. 4.2, et conduit à

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{T_x}{R_x} - \frac{T_y}{R_y} \approx T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f. \quad (4.8)$$

Ici, bien sûr, $[\rho] = \text{kg/m}^2$, $[T] = \text{N/m}$, $[f] = \text{N/m}^2$. Enfin, dans le cas où $T_x \neq T_y$, on est toujours libre de redéfinir $T_x = T$ et $y = \sqrt{T_y/T} y'$, ce qui donne, en définitive,

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = T \nabla^2 w + f. \quad (4.9)$$

Note : $\nabla^2 w \approx \kappa_x + \kappa_y$ est la courbure moyenne.

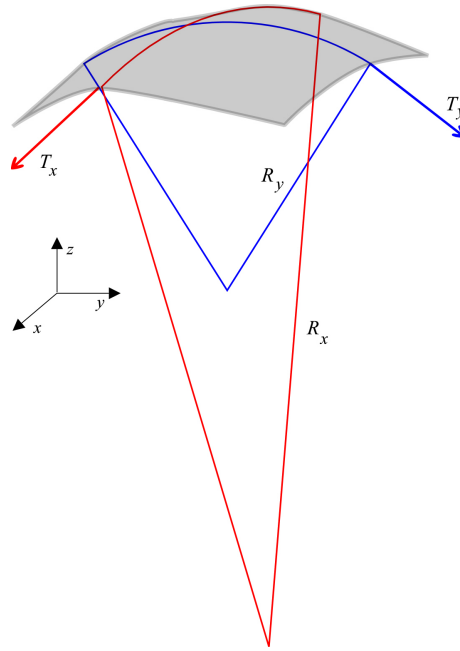


FIGURE 4.2 – Tensions et courbures dans une membrane.

4.2 Poutres I

Contrairement à une corde, une poutre oppose une résistance à une compression ou une force tranchante. Tout élément allongé en forme de tige se modélise peu ou prou comme une poutre : os, colonne vertébrale, cheminée, brin d'herbe, cheveux, câbles.... Il faut, pour la décrire, introduire la force tranchante N et le couple M en chaque section transverse, voir Fig. 4.3.

En procédant comme pour la corde, le bilan d'impulsion vertical donne

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f + T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (4.10)$$

Par ailleurs, l'équilibre de rotation d'un élément de poutre donne (exercice 4.1)

$$\frac{\partial M}{\partial x} + N = 0. \quad (4.11)$$

Donc

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f + T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}. \quad (4.12)$$

Finalement, nous imposons la relation constitutive

$$M = -\frac{B}{R} = B \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (4.13)$$

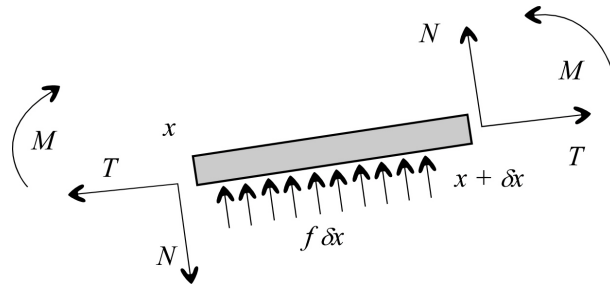


FIGURE 4.3 – Élément de poutre.

qui suppose la proportionnalité entre couple appliqué et courbure. B est le coefficient de rigidité en flexion (anglais : 'bending stiffness'). Notons que, d'après (4.11),

$$N = -B \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}. \quad (4.14)$$

Nous établirons la relation (4.13) plus loin. Avec celle-ci, l'équation de la poutre devient

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f + T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}, \quad (4.15)$$

qui généralise (4.6). Comme elle est du quatrième ordre en x , on s'attend à devoir imposer quatre conditions aux bords. Les cas de figure les plus courants sont :

support simple : $w = a$, $M = \partial^2 w / \partial x^2 = 0$.

encastrement (clamp) : $w = a$, $\partial w / \partial x = b$.

extrémité libre : $M = N = 0 \rightarrow \partial^2 w / \partial x^2 = \partial^3 w / \partial x^3$. Dans ce cas aussi, $T = 0$.

Remarque : bien que (4.15) soit linéaire, il faut être conscient du fait que le terme $T w_{xx}$ fait intervenir le produit d'une contrainte et d'un déplacement. La contrainte étant proportionnelle au déplacement, il s'agit donc d'un terme non-linéaire du point de vue de l'élasticité. Malgré sa plausibilité, il est par conséquent impossible à déduire de l'élasticité linéaire. La relation (4.13), par contre, peut être établie à partir de l'élasticité linéaire, ce que nous faisons ci-dessous.

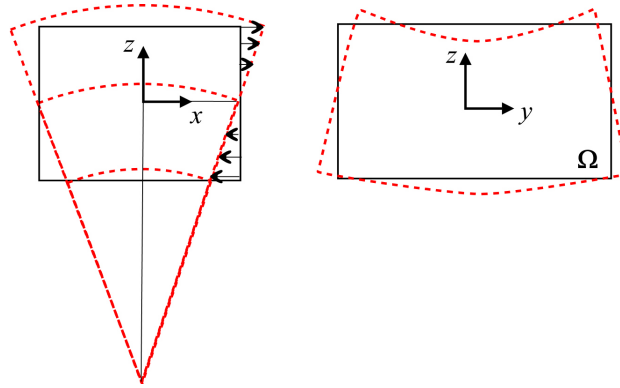


FIGURE 4.4 – Portion de poutre avant déformation (continu) et après (pointillé). A gauche, par similitude, $x/R = \kappa x = u/z$. A droite, déformation d'une section transverse à l'axe x .

4.2.1 Relation $B = M \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

En l'absence de force appliquée sur les faces latérales de la poutre, supposons l'état uni-axial de contrainte

$$\tau_{xx} = E\kappa z + \tau_{xx}^{(2)} z^2 + \dots, \quad (4.16)$$

où l'origine de l'axe z est choisie à la 'fibre neutre', c.à.d. là où la contrainte est nulle. Comme la plaque est supposée mince, nous négligerons $\tau_{xx}^{(2)} z^2$ et les termes d'ordre supérieur en z .¹ Par rapport à $z = 0$, ce champ de contrainte produit le moment de force

$$M = - \iint_{\Omega} z \tau_{xx} \, da = -E\kappa \iint_{\Omega} z^2 \, da, \quad (4.17)$$

où Ω est la section transverse de la poutre. L'intégrale ci-dessus est une caractéristique géométrique de la section. Par analogie à la mécanique classique, on l'appelle moment d'inertie géométrique :

$$M = -EI\kappa, \quad I = \iint_{\Omega} z^2 \, da. \quad (4.18)$$

En se référant à la Section 2.6.1, on trouve facilement le champ de déformation

$$e_{xx} = \kappa z, \quad e_{yy} = e_{zz} = -\nu \kappa z, \quad e_{xy} = e_{xz} = e_{yz} = 0. \quad (4.19)$$

1. Pour une discussion plus détaillée de ce point, voir 'Applied Solid Mechanics', chapitre 6.

et le champ de déplacement correspondant (à une translation et une rotation d'ensemble près)

$$u = \kappa z x, \quad v = -\nu \kappa z y, \quad w = -\frac{\kappa x^2}{2} + \frac{\nu \kappa y^2}{2} - \frac{\nu \kappa z^2}{2}. \quad (4.20)$$

On voit donc que la fibre centrale, en $y, z = 0$, se déforme selon $w = -\kappa x^2/2$, c.à.d. avec une courbure $-\kappa$. Ainsi $B = EI$ dans (4.13).

La figure 4.4 indique le lien géométrique entre l'allongement horizontal u et la courbure de w . En définitive, c'est pour permettre cet allongement dans l'axe de la poutre qu'il faut un couple M . De plus, (4.18) fait apparaître l'importance de la forme de la section Ω dans la résistance d'une poutre : plus la matière est loin de l'axe neutre $z = 0$, plus elle contribue à I . Cette information est particulièrement utile pour optimiser la résistance d'une poutre. Supposons que la poutre ait une épaisseur h dans la direction z . Par (4.18), la rigidité en flexion par unité de longueur dans la direction y est

$$\frac{dB}{dy} = \frac{Eh^3}{12}. \quad (4.21)$$

Enfin, d'après le champ de déplacement (4.19), nous remarquons que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\kappa, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nu \kappa \quad (4.22)$$

Ainsi, la surface médiane $z = w(x, y, 0)$ possède une courbure non nulle dans la direction y . De plus, celle-ci est opposée à la courbure principale dans la direction x . On dit de cette surface déformée qu'elle est *anti-clastique*. La Fig. 4.4 illustre la déformation d'une section transverse de la poutre. Cette remarque est cruciale pour distinguer mécaniquement une poutre d'une plaque.

4.3 Plaques

4.3.1 Couple produit par $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

Nous avons vu que, pour une poutre, $w(x, y, 0) = -\kappa x^2/2 + \nu \kappa y^2/2$. Si nous insistons pour que $w(x, y, 0) = -\kappa x^2/2$, nous trouvons (exercice 4.2) :

$$w = -\frac{\kappa x^2}{2} - \frac{\nu \kappa}{1 - \nu} \frac{z^2}{2}, \quad (4.23)$$

et

$$\tau_{xx} = \frac{E}{1 - \nu^2} \kappa z, \quad \tau_{yy} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \kappa z, \quad (4.24)$$

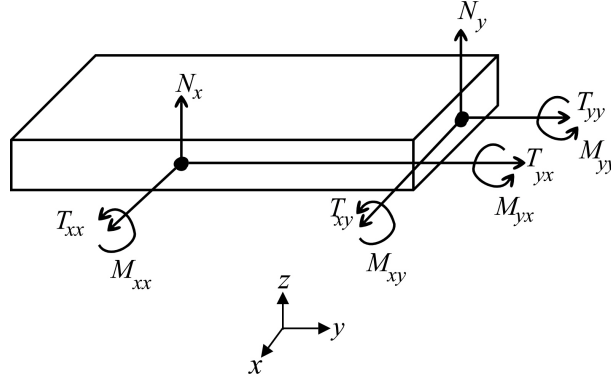


FIGURE 4.5 – Forces et couples par unité de longueur dans une plaque.

les autres contraintes étant nulles. Notons que le champ de déformations est tel que

$$e_{xx} = \kappa z, \quad e_{yy} = 0, \quad (4.25)$$

à contraster avec (4.19). Nous voyons qu'une contrainte τ_{yy} est nécessaire pour empêcher le développement d'une courbure dans la direction y . De plus, τ_{xx} est augmenté d'un facteur $(1 - \nu^2)^{-1}$ par rapport au cas précédent. Comme il y a deux contraintes non nulles, il y a aussi deux moments non nuls. Notons (Fig. 4.5) par M_{ij} le moment par unité de longueur d'axe e_i s'exerçant sur une section de normale e_j , càd.

$$M_{yx} = \int z \tau_{xx} dz, \quad M_{xy} = - \int z \tau_{yy} dz. \quad (4.26)$$

Nous trouvons

$$M_{yx} = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad M_{xy} = \nu D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (4.27)$$

avec

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (4.28)$$

expression à comparer avec (4.21)

4.3.2 Couple produit par $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

Par analogie avec ce qui précède, on déduit directement que la courbure $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ nécessite les moments

$$M_{yx} = -\nu D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad M_{xy} = D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (4.29)$$

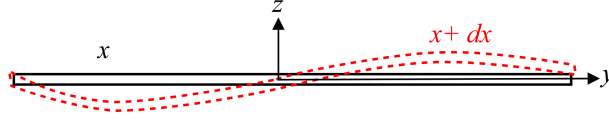


FIGURE 4.6 – Variation de profil sur une distance dx correspondant à $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$.

Le champ de déformations associé est

$$e_{xx} = 0, \quad e_{yy} = \kappa z = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z. \quad (4.30)$$

4.3.3 Couple produit par $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$

Comme l'illustre Fig. 4.6, $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ décrit une torsion de la plaque autour des axes x et y . Supposons cette fois que

$$e_{xy} = \kappa z, \quad (4.31)$$

les autres composantes du tenseur de déformation étant nulles. Il y correspond la contrainte

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1 + \nu} e_{xy}, \quad (4.32)$$

et les couples par unité de longueur

$$M_{xx} = -M_{yy} = -\int z \tau_{xy} dz = -(1 - \nu) D \kappa. \quad (4.33)$$

De (4.31), nous déduisons que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \kappa z, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0. \quad (4.34)$$

En dérivant respectivement par rapport à z , y , et x , nous obtenons

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} = 2\kappa, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \quad (4.35)$$

Ainsi,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\kappa, \quad (4.36)$$

et, par conséquent,

$$M_{xx} = -M_{yy} = (1 - \nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (4.37)$$

4.3.4 Synthèse des cas précédents

Par linéarité des équations de l'élasticité, nous pouvons superposer les déformations (4.27), (4.29) et (4.37). Dans le cas général, nous obtenons ainsi

$$M_{yx} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (4.38)$$

$$M_{xy} = D \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (4.39)$$

$$M_{xx} = -M_{yy} = (1 - \nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (4.40)$$

4.3.5 Equations d'une plaque

Commençons par l'équilibre des forces dans le plan de la plaque. En se référant à la Fig. 4.5, on trouve

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} = 0. \quad (4.41)$$

De plus, par le même raisonnement que pour τ nous concluons que $T_{xy} = T_{yx}$. Ensuite, le bilan des forces verticales donne

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \rho g_z + \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial (T_{xx} w_x)}{\partial x} + \frac{\partial (T_{xy} w_x)}{\partial y} + \frac{\partial (T_{yy} w_y)}{\partial y} + \frac{\partial (T_{xy} w_y)}{\partial x} \\ &= \rho g + \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + T_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2T_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + T_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

où nous avons utilisé (4.41). Par ailleurs, les équilibres de rotation autour des axes x et y donnent, respectivement,

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + N_y = 0, \quad \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - N_x = 0. \quad (4.43)$$

En combinant cette dernière équation avec (4.42), nous trouvons

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \rho g_z + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y^2} + T_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2T_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + T_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (4.44)$$

Enfin, en tenant compte des relations (4.38) à (4.40), on trouve

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \rho g_z + T_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2T_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + T_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - D \nabla^4 w,} \quad (4.45)$$

équation qui généralise (4.15). Rappelons que les termes impliquant le produit d'une tension et d'un déplacement sont non linéaires. Le système d'équations (4.41) et (4.45) reste cependant linéaire tant que les T_{ij} sont indépendants de w . Lorsque w n'est plus 'petit', cela n'est plus vrai, car l'expression non linéaire du tenseur de déformation (1.17) entre en jeu. Nous discuterons ce point à la fin de cette section.

4.3.6 Conditions aux bords

Par analogie au cas de la poutre, pour une plaque encastree, on aura w et $\frac{\partial w}{\partial n}$ donnés sur le bord.

Le cas d'un bord libre est plus délicat. Supposons que le bord en question se trouve en $x = 0$. Si aucune force n'est appliquée, on pourrait croire que nécessairement $M_{yx}, N_x, M_{xx} = 0$, puisque les contraintes τ_{jx} sont nulles. Cependant, cela donnerait plus de conditions au bord que (4.45) ne peut en satisfaire. En réalité, on s'aperçoit que $\frac{\partial M_{xx}}{\partial y}$ est statiquement équivalent à une force tranchante par unité de longueur N_x . Aussi, en l'absence de force verticale appliquée au bord $x = 0$, les conditions aux bords sont

$$M_{yx} = 0, \quad N_x = \frac{\partial M_{xx}}{\partial y}.$$

4.3.7 Équations de von Kármán

Les équations (4.41) peuvent se résoudre automatiquement par l'introduction d'une *fonction d'Airy*, équivalente à un potentiel pour les champs de contraintes à 2D. En effet, on peut vérifier aisément que si l'on pose

$$T_{xx} = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}, \quad T_{xy} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}, \quad T_{yy} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \quad (4.46)$$

alors les équations (4.41) sont automatiquement satisfaites. L'équation (4.45) peut donc se réécrire

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \rho g_z + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - D \nabla^4 w \quad (4.47)$$

Il faut maintenant trouver une équation pour A . Pour ce faire, nous revenons à l'expression du tenseur de déformation (1.17). Dans celle-ci, nous supposons que le déplacement w est plus grand que u et v et que les coordonnées

de Lagrange X et Y restent assimilables à x et y . Dans ce cas,

$$e_{xx} \approx \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = E^{-1} h^{-1} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right), \quad (4.48)$$

$$2e_{xy} \approx \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = -E^{-1} h^{-1} (1 + \nu) \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}, \quad (4.49)$$

$$e_{yy} \approx \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = E^{-1} h^{-1} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right). \quad (4.50)$$

De ces relations, on peut éliminer u et v en dérivant la première deux fois par y , la deuxième par x et y et la troisième deux fois par x . On obtient

$$\nabla^4 A = -Eh \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \quad (4.51)$$

Les équations (4.47) et (4.51) sont appelées *équations de von Kármán*. Si w est suffisamment petit, (4.51) se réduit à $\nabla^4 A = 0$ et les contraintes dans le plan de la plaque sont découplées du déplacement transverse w . Le membre de droite de (4.51) est une quantité géométrique importante de la surface $w(x, y)$: il s'agit de la courbure Gaussienne. Alors qu'on avait la courbure moyenne

$$\nabla^2 w = \kappa_1 + \kappa_2 \quad (4.52)$$

associée aux effets de membrane, la courbure Gaussienne est

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 = \kappa_1 \kappa_2. \quad (4.53)$$

Celle-ci relie la déformation w à l'étirement qu'elle produit dans le plan (x, y) , et donc au surcroît de tension via (4.51).

4.4 Poutres II.

Soit une poutre de longueur L comprimée par une force $T = -P$ avec un couple nul aux bords. L'équation (4.15) est

$$B \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad \text{avec} \quad w = \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad x = 0, L. \quad (4.54)$$

La seule solution possible est $w = 0$, sauf lorsque $P = P_n = n^2 \pi^2 B / L^2$. Pour ces valeurs, on trouve la solution supplémentaire $w = A \sin(n\pi x / L)$, où A est indéterminé. On peut vérifier l'existence du seuil de compression

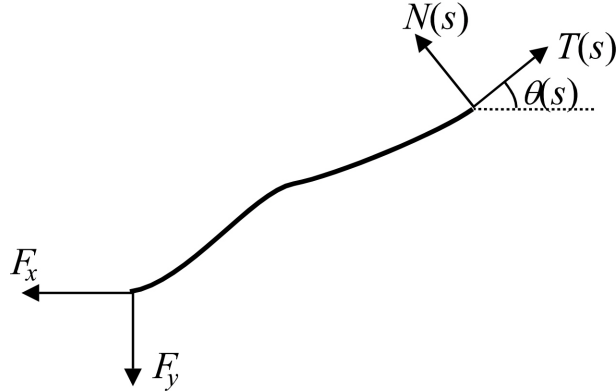


FIGURE 4.7 – Forces agissant sur un tronçon de poutre.

P_1 en comprimant une latte (ou une règle). Cependant, on sait bien qu'une déformation non nulle persiste au-delà de ce seuil ; de plus, son amplitude varie de manière précise avec la force de compression. Pour décrire cela, il faut généraliser (4.15) en incluant les effets non linéaires.

Soit s la distance le long de la poutre et θ l'angle qu'elle fait avec l'horizontale, T la tension dans l'axe de la poutre et N la force tranchante. À l'équilibre (Fig. 4.7), pour un s donné et en l'absence de force de gravité, on trouve immédiatement que

$$T \cos \theta - N \sin \theta = F_x, \quad T \sin \theta + N \cos \theta = F_y, \quad (4.55)$$

où F_x et F_y sont les composantes horizontales et verticales des forces appliquées en $s = 0$. De ces équations, on tire immédiatement

$$N = -\sin \theta F_x + \cos \theta F_y. \quad (4.56)$$

L'équilibre de rotation reste exprimé par (4.11) et l'on continue de supposer que M est proportionnel à la courbure, c.à.d.

$$M = B \frac{d\theta}{ds}. \quad (4.57)$$

Finalement, on obtient

$$B \frac{d^2\theta}{ds^2} - F_x \sin \theta + F_y \cos \theta = 0. \quad (4.58)$$

Dans l'exemple que nous avons abordé en début de section, $F_x = -P$, $F_y = 0$ et $\frac{d\theta}{ds} = 0$ en $s = 0, L$. Cela donne

$$B \frac{d^2\theta}{ds^2} + P \sin \theta = 0, \quad \left. \frac{d\theta}{ds} \right|_{s=0,L} = 0. \quad (4.59)$$

Étudions cette équation près du seuil critique $P = P_1$. Posons

$$P = P_1(1 + \delta), \quad \theta = \epsilon\varphi, \quad \delta, \epsilon \ll 1. \quad (4.60)$$

Eq. (4.59) devient

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{P_1}{B}(1 + \delta) \left(\varphi - \frac{\epsilon^2}{6}\varphi^3 + \dots \right) \sim \frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{P_1}{B}\varphi + \frac{P_1}{B}\delta\varphi - \epsilon^2\frac{P_1}{B}\frac{\varphi^3}{6} = 0. \quad (4.61)$$

Afin que l'excès de compression par rapport au seuil P_1 , troisième terme ci-dessus, puisse être compensé par les effets non linéaires, dernier terme ci-dessus, il faut que

$$\epsilon^2 = \delta, \quad (4.62)$$

ce qui donne le modèle approché

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{P_1}{B}\varphi + \delta\frac{P_1}{B} \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right) = 0 \quad (4.63)$$

Si $\delta = 0$, on a $\varphi = C \cos(\pi s/L)$. Posons donc

$$\varphi \sim C \cos(\pi s/L) + \delta\varphi_1 + \dots \quad (4.64)$$

À l'ordre δ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi_1}{ds^2} + \frac{P_1}{B}\varphi_1 &= -\frac{P_1}{B} \left(C \cos(\pi s/L) - \frac{C^3}{6} \cos^3(\pi s/L) \right) \\ &= -\frac{P_1}{B} \left[\left(C - \frac{C^3}{8} \right) \cos(\pi s/L) - \frac{C^3}{24} \cos(3\pi s/L) \right] \end{aligned} \quad (4.65)$$

On obtient la condition de solvabilité

$$C - \frac{C^3}{8} = 0, \quad \rightarrow \quad C = 0, \pm\sqrt{1/8}. \quad (4.66)$$

Ainsi, la solution d'amplitude non nulle est donnée par

$$\theta \sim \pm\sqrt{\frac{P - P_1}{8P_1}} \cos(\pi s/L). \quad (4.67)$$

La forme de la poutre se déduit ensuite de

$$x(s) = \int_0^s \cos\theta(s') ds', \quad w(s) = \int_0^s \sin\theta(s') ds'. \quad (4.68)$$

Au premier ordre, cela donne

$$x = s, \quad w = \pm\frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{P - P_1}{8P_1}} \cos(\pi x/L). \quad (4.69)$$

Exercices Chapitre 4 -I

- 4.1 Soit un élément de poutre $a < x < a + \ell$ pivotant à une vitesse angulaire $d\theta/dt$ autour du point $x = a$. Avec la force transverse par unité de longueur f et les forces de cisaillement $N(a), N(a + \ell)$ et les moments $M(a), M(a + \ell)$, montrez que

$$\rho \frac{\ell^3}{3} \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\ell^2}{2} f(a + \alpha\ell) + \ell N(a + \ell) + M(a + \ell) - M(a),$$

où $0 < \alpha < 1$ et donc que $\partial M/\partial x + N = 0$

- 4.2 Soit une plaque définie dans l'espace par $-h/2, z/h/2$. Sachant que le champ de déplacement correspondant à l'état uniaxial de contrainte $\tau_{xx} = \kappa_1 z$ est donné par

$$(u \quad v \quad w) = \kappa_1 \left(xz \quad -\nu yz \quad -\frac{x^2}{2} + \frac{\nu y^2}{2} - \frac{\nu z^2}{2} \right),$$

- (a) Calculez le champ de déplacement de l'état de contrainte bi-axial $\tau_{xx} = \kappa_1 z, \tau_{yy} = \kappa_2 z$.
- (b) Dans le cas où $\partial^2 w/\partial y^2 = 0$, calculez, τ ainsi que le couple par unité de longueur autour d'un axe quelconque situé dans le plan $z = 0$.
- 4.3 Calculez le champ de déplacement et de contrainte associé à la déformation

$$e_{xx} = \kappa z, \quad e_{zz} \neq 0, \quad e_{yy}, e_{xy}, e_{xz} = e_{yz} = 0,$$

en supposant $\tau_{zz} = 0$. À quoi correspond cette seconde hypothèse ?

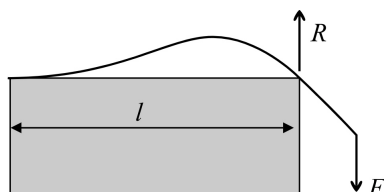
- 4.4 Montrer que les fréquences propres d'une corde de piano de longueur L simplement supportée aux extrémités sont approximativement données par

$$\omega_n \sim \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho} + \frac{n^3 \pi^3 EI}{L^3 \sqrt{\rho T}}}$$

lorsque la résistance en flexion est petite.

- 4.5 Soit une poutre de longueur L encastrée à une distance $l < L$ du coin d'une table, avec un poids F qui pend à l'autre extrémité. En négligeant le poids propre de la poutre, justifiez et résolvez le modèle suivant

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{R}{EI} \delta(x - l), \quad w(0) = \frac{dw}{dx} \Big|_0 = \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_L = \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_L - \frac{F}{EI} = 0.$$



4.6 Justifiez l'équation d'onde de compression dans une barre

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

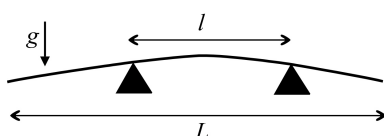
4.7 Supposez qu'une barre résiste à un couple de torsion $M = R \frac{\partial \theta}{\partial x}$, où R est une constante et θ est un angle de rotation autour de l'axe de la barre. Que vaut R si la section transverse de la barre est un rectangle de largeur h et longueur $\ell \gg h$? Justifiez ensuite l'équation d'ondes de torsion

$$\mathcal{J} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = R \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}.$$

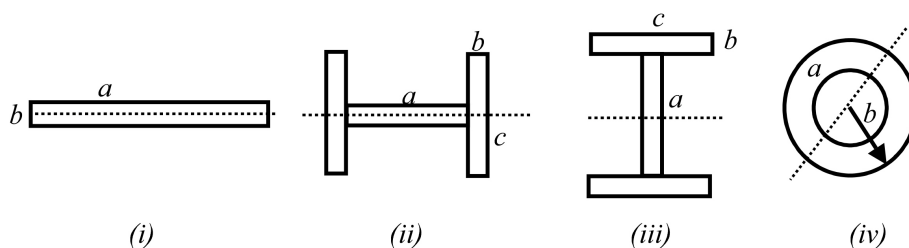
4.8 Soit une poutre (longueur L) se déformant sous son propre poids et placée symétriquement sur deux supports simples distants de $l < L$. Établissez le modèle sans dimension suivant

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w}{dx^4} &= R \delta(x - l'/2) - \rho g, & \frac{dw}{dx} \Big|_0 &= \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_0 = w(l'/2) = 0 \\ \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{L/2} &= \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{L/2} = 0. \end{aligned}$$

Discutez la forme de la solution en fonction de l' .



4.9 Calculez le moment d'inertie des sections de poutres dessinées ci-dessous par rapport à l'axe en pointillé. Tirez une conclusion pratique de chaque cas.



Exercices Chapitre 4 -II

- 4.10 *Thermo-élasticité* On suppose qu'une variation de température donne lieu à une déformation uniforme

$$e_{ij} = \frac{\alpha}{3} (T - T_0) \delta_{ij}.$$

La généralisation la plus simple des équations constitutives est de la forme

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda e_{kk} \delta_{ij} - S\alpha(T - T_0)\delta_{ij}. \quad (4.70)$$

Expliquez pourquoi il faut que $S = (\lambda + 2\mu/3)$.

- 4.11 Soit un rail de longueur L maintenu dans les conditions d'un encastrement à ses extrémités. À partir de quelle température $T - T_0$ le rail se déforme-t-il ?
- 4.12 On suppose ensuite que le rail est maintenu à sa position initiale par une force par unité de longueur $f = -\kappa w$, où w est le déplacement transverse du rail. Quelle est l'origine de cette force de rappel ?
- (a) Donnez l'équation de w .
- (b) Dans la limite $L \rightarrow \infty$, pour quelle valeur de $T - T_0$ se produit la première déformation et quelle est sa longueur caractéristique ?
- 4.13 Calculez la densité d'énergie élastique par unité de volume d'une déformation de plaque fine. Intégrez cette énergie sur l'épaisseur de la plaque et obtenez l'énergie par unité de surface

$$\hat{W} = D \left\{ \frac{1}{2} (\nabla^2 w)^2 - (1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\}$$

- 4.14 Déduisez du calcul précédent que l'énergie de flexion d'une poutre est

$$U_B = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx.$$

[note : B pour 'bending'.]

- 4.15 Montrez que dans une poutre en tension T , le travail effectué par T , et donc l'énergie élastique emmagasinée dans le solide, est donné par

$$U_S = T \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx.$$

[note : S pour 'stretching'.]

- 4.16 D'après les deux points précédents, l'énergie élastique totale d'une poutre en tension est $U_B + U_S$. Montrez que la minimisation de cette énergie conduit à

$$0 = \int_0^L \delta w \left(B \frac{d^4 w}{dx^4} - T \frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx + \left[B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta w \right) + T \frac{\partial w}{\partial x} \delta w \right]_0^L,$$

où δw est une petite variation de w . Déduisez-en l'équation statique d'une poutre et, pour $T = 0$, les conditions aux limites 'naturelles'.

- 4.17 Expliquez que pour une poutre en compression, la solution d'essai $w = A \sin(\pi x/L)$ est moins stable que $w = 0$ pour $P < \pi^2 B/L^2$ et plus stable pour $P > \pi^2 B/L^2$.

- 4.18 Montrez que, pour une plaque dans le plan (x, y) , la quantité

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2$$

est indépendante du système d'axes. Déduisez-en que cela vaut $\kappa_1 \kappa_2$, où κ_1 et κ_2 sont les courbures principales.

[Ce produit est appelé Courbure Gaussienne. Il est d'une grande importance pour les théories non linéaires -voir théorie de von Kármán.]

- 4.19 Montrez que pour une variation δw de w , on a, au premier ordre en δw ,

$$\delta \left\{ \frac{1}{2} (\nabla^2 w)^2 \right\} = \delta w \nabla^4 + \operatorname{div} (\nabla^2 w \nabla(\delta w) - \delta w \nabla(\nabla^2 w))$$

et que

$$\delta \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} = \operatorname{div} \mathbf{F}$$

où

$$F_x = \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \delta w \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}, \quad F_y = \frac{\partial \delta w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \delta w \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - 2 \frac{\partial w}{\partial x \partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial x}.$$

Déduisez que la minimisation de l'énergie élastique d'une plaque requiert

$$\nabla^4 w = 0.$$

De plus, pour un bord situé en $x = \text{const.}$, montrez que les conditions aux bords naturelles sont

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0.$$

4.20 Équation de la chaînette. Justifiez l'équation non linéaire d'une chaînette soumise à la gravité :

$$T \cos \theta - N \sin \theta = F_x, \quad T \sin \theta + N \cos \theta = F_y + \rho g s, \quad B \frac{d^2 \theta}{ds^2} = N.$$

Résolvez cette équation dans le cas d'une résistance en flexion négligeable ($B = 0$) et avec les conditions aux limites

$$x(0) = 0, \quad w(0) = 0, \quad x(L) = d, \quad w(L) = 0.$$

La solution est

$$w = \frac{L}{2 \tan \theta_0} \left\{ \cosh \left(\frac{2x - d}{L} \tan \theta_0 \right) - \cosh \left(\frac{d}{L} \tan \theta_0 \right) \right\}.$$

[Note : (1) on peut utiliser $\int (1 + x^2)^{-1/2} dx = \operatorname{arcsinh}(x)$ (2) cf. câbles électriques, The Saint Louis Gateway Arch,...]

Annexe A

Etude multi-échelle des paquets d'onde en eau profonde

Nous présentons ici une étude faiblement non linéaire des vagues en eau profonde. Nous apportons une correction non linéaire à la forme des vagues (Fig. A.1); nous établissons (3.46) et (3.47) par la méthode des échelles multiples.

Nous reprenons l'étude de vagues modélisées par ¹

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (\text{A.1})$$

pour $y < h(x, t)$ et

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + gh - \frac{\gamma \kappa}{\rho} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (\text{A.2})$$

en $y = h(x, t)$.

Avant de résoudre ces équations, exprimons-les sans dimension. Comme nous voulons décrire des ondes, il est naturel d'utiliser la pulsation ω et le nombre d'onde k comme base de renormalisation des variables. Posons

$$kx = x', ky = y', \omega t = t' \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'} \right), \frac{\partial}{\partial t} = \omega \frac{\partial}{\partial t'}. \quad (\text{A.3})$$

De la sorte, un profil typique de vague, $\cos(kx - \omega t)$ s'écrit simplement $\cos(x' - t')$. Disposant des unités de longueur et de temps, nous déduisons

1. Dans ce chapitre, y remplace z comme coordonnée verticale.

l'unité de vitesse ω/k . Écrivons donc

$$\phi(x, y, t) = \frac{\omega}{k^2} \phi'(x', y', t'), \quad h(x, t) = \frac{1}{k} h'(x', t') \quad (\text{A.4})$$

À l'intérieur du fluide, nous gardons, en variables réduites,

$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y'^2} = 0, \quad y' < h'. \quad (\text{A.5})$$

et, en surface, nous obtenons :

$$\frac{\omega^2}{k^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t'} + \frac{g}{k} h' - \frac{\gamma}{\rho} \frac{k \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial h'}{\partial x'}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{\omega^2}{k^2} \frac{1}{2} |\nabla \phi'|^2 = 0, \quad \frac{\omega}{k} \frac{\partial \phi'}{\partial y'} = \frac{\omega}{k} \frac{\partial h'}{\partial t'} + \frac{\omega}{k} \frac{\partial \phi'}{\partial x'} \frac{\partial h'}{\partial x'},$$

càd.

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t'} + \mathcal{G} h' - \frac{\mathcal{T} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}{\left(1 + (\partial h' / \partial x')^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{2} |\nabla \phi'|^2 = 0, \quad \frac{\partial \phi'}{\partial y'} = \frac{\partial h'}{\partial t'} + \frac{\partial \phi'}{\partial x'} \frac{\partial h'}{\partial x'}, \quad (\text{A.6})$$

où n'apparaissent plus que les nombres sans dimension (à vérifier, sachant qu'une tension est une force par unité de longueur)

$$\mathcal{G} = \frac{gk}{\omega^2}, \quad \mathcal{T} = \frac{\gamma k^3}{\rho \omega^2}. \quad (\text{A.7})$$

Clairement, le premier est associé à la gravité et le second à la tension de surface. Sans calcul, on peut directement s'attendre à ce que les effets de tension de surface soient négligeables par rapport à l'action de la gravité, si $\mathcal{T} \ll \mathcal{G}$ et inversement, si $\mathcal{T} \gg \mathcal{G}$. La grandeur relative de ces deux nombres est donnée par $\mathcal{T}/\mathcal{G} = \gamma k^2 / (\rho g)$, càd.

$$\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{G}} = (k \lambda_c)^2, \quad (\text{A.8})$$

où $\lambda_c = \sqrt{\gamma / \rho g}$ est la *longueur capillaire* (angl : capillary length). Pour l'interface air/eau, $\gamma = 0.073 \text{N/m}$, ce qui donne $\lambda_c = 2.7 \text{mm}$. La longueur d'onde pour laquelle $\mathcal{T} = \mathcal{G}$ est à peu près 1.7 cm.

Le problème posé par (A.5) et (A.6) est hautement non linéaire, non seulement à cause des termes apparaissant en (A.6) mais aussi du fait que ces conditions aux limites s'appliquent en $y = h(x, t)$, dont nous ne connaissons pas *a priori* la valeur. Pour progresser, nous supposons que les vagues sont de faible amplitude, ce que nous formalisons par

$$\phi' = \epsilon \varphi, \quad h' = \epsilon \eta, \quad \epsilon \ll 1. \quad (\text{A.9})$$

Le petit paramètre ϵ donne donc le rapport entre la hauteur des vagues et leur longueur d'onde. Pour alléger les notations dans ce qui suit, nous omettons les primes et notons les dérivées par un indice. Les équations deviennent

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= 0, & y < \epsilon \eta \\ \varphi_t + \mathcal{G}\eta - \frac{\mathcal{T}\eta_{xx}}{(1 + \epsilon^2 h_x^2)^{3/2}} + \frac{\epsilon}{2} |\nabla \varphi|^2 &= 0, & \varphi_y = \eta_t + \epsilon \varphi_x \eta_x, & y = \epsilon \eta, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

et si nous posons purement et simplement $\epsilon = 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= 0, & y < 0 \\ \varphi_t + \mathcal{G}\eta - \mathcal{T}\eta_{xx} &= 0, & \varphi_y = \eta_t, & y = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

La première équation se résout aisément². Étudiant des ondes progressives dans la direction x , soit

$$\varphi = \text{Re} \{ A e^{i(x-iy-t)} \}. \quad (\text{A.12})$$

Par substitution dans (A.11), on obtient immédiatement $\eta = \text{Re} \{ i A e^{i(x-iy-t)} \}$ et

$$\mathcal{G} + \mathcal{T} = 1, \quad \rightarrow \quad \boxed{\omega^2 = gk + \gamma k^3 / \rho} \quad (\text{A.13})$$

Supposons à présent l'amplitude A dans (A.12) varie lentement en x . Pour simplifier le calcul, nous négligerons la tension de surface, càd. que nous supposons

$$\mathcal{G} = 1, \quad \mathcal{T} = 0. \quad (\text{A.14})$$

Nous formalisons la lente variation de A par l'introduction des variables lentes

$$X = \delta x, \quad Y = \delta y, \quad T = \delta t, \quad \delta \ll 1. \quad (\text{A.15})$$

Ainsi, X, Y, T ne varient significativement que lorsque x, y, t sont d'ordre $\delta^{-1} \gg 1$. L'amplitude A est donc supposée avoir la dépendance spatio-temporelle $A = A(X, Y, T)$. Mais comme φ est harmonique, on peut directement écrire

$$A(X, Y, T) = A(X - iY, T), \quad (\text{A.16})$$

ce qui rend $\nabla^2 \varphi = 0$ automatique dans $y < 0$. En $y = 0$, on a

$$\varphi_t + \eta = 0, \quad \varphi_y = \eta_t, \quad (\text{A.17})$$

2. Rappel du cours d'analyse complexe : $\text{Re } f(x-iy)$ est harmonique pour toute fonction analytique f .

ou encore,

$$\eta = -\varphi_t, \quad \varphi_y + \varphi_{tt} = 0, \quad (\text{A.18})$$

Vu l'introduction de δ , nous cherchons une solution sous la forme d'un développement asymptotique

$$\begin{aligned} \varphi \sim & A(X - iY, T)e^{i(x-t)+y} + A^*(X + iY, T)e^{-i(x-t)+y} \\ & + \delta\varphi_1(x - t, y, X, Y, T) + \delta^2\varphi_2(x - t, y, X, Y, T) + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Dans l'expression de φ_1 et φ_2 , X, Y, T sont traitées comme si elles étaient indépendantes de x, y, t , car elles sont censées être attachées à des phénomènes dissociés -la lente variation de l'amplitude des oscillations. Bien sûr, par (A.15) nous savons que ces variables ne sont pas indépendantes mais l'esprit de la méthode des échelles multiples est de le supposer. Par ailleurs, pour exploiter le développement (A.19), on suppose que le premier terme domine et que $\delta\varphi_1$ est une petite correction. Une fois $\delta\varphi_1$ calculé, $\delta^2\varphi_2$ raffine notre approximation et ainsi de suite. On suppose donc implicitement que $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ sont tous d'ordre 1. En substituant (A.19) dans la deuxième équation de (A.18) et en réunissant tous les termes ordre par ordre, on voit qu'à l'ordre 0 en δ , (A.18) est vérifié et qu'à l'ordre suivant, δ , on a

$$\varphi_{1,y} + \varphi_{1,tt} = i \left(\frac{\partial A}{\partial X} + 2 \frac{\partial A}{\partial T} \right) e^{i(x-t)} + \text{c.c.} \quad (\text{A.20})$$

C'est une équation différentielle inhomogène pour φ_1 . Comme les variables X et T sont supposées indépendantes de x, y et t , $\frac{\partial A}{\partial X} + 2 \frac{\partial A}{\partial T}$ est vu comme constant sur les échelles x, y et t . Donc le membre de droite est équivalent à une amplitude constante multipliant un facteur oscillant de la forme $e^{i(x-t)}$. Pour trouver une solution particulière, on pourrait essayer

$$\varphi_1 = B(X, T)e^{i(x-t)} + \text{c.c.},$$

mais on s'aperçoit immédiatement que dans ce cas $\varphi_{1,y} + \varphi_{1,tt} = 0$. Par contre, avec $\varphi_1 = tB(X, T)e^{i(x-t)} + \text{c.c.}$, on a $\varphi_{1,y} + \varphi_{1,tt} = -2iB e^{i(x-t)} + \text{c.c.}$ et on trouve donc la solution particulière

$$\varphi_1 = -\frac{t}{2} \left(\frac{\partial A}{\partial X} + 2 \frac{\partial A}{\partial T} \right) e^{i(x-t)} + \text{c.c.} \quad (\text{A.21})$$

Notre solution approchée s'écrit ainsi

$$\varphi = A(X - iY, T)e^{i(x-t)+y} - \delta \frac{t}{2} \left(\frac{\partial A}{\partial X} + 2 \frac{\partial A}{\partial T} \right) e^{i(x-t)+y} + \text{c.c.} + \dots \quad (\text{A.22})$$

Cependant, en regardant attentivement cette expression, on s'aperçoit que les termes d'ordre δ deviennent du même ordre que les premiers pour les temps longs, càd. pour $t = O(1/\delta)$.³ Mais dans ce cas, l'argument qui a présidé à la dérivation de (A.21) s'écroule! La seule manière de maintenir la validité de notre développement pour les temps longs, c'est donc d'imposer que

$$\frac{\partial A}{\partial X} + 2\frac{\partial A}{\partial T} = 0. \quad (\text{A.23})$$

On appelle cela la *condition de solvabilité* et c'est la pierre angulaire des méthodes asymptotiques. La résolution de (A.23) est immédiate :

$$A(X, T) = A\left(X - \frac{T}{2}\right). \quad (\text{A.24})$$

Le paquet d'ondes se propage donc à la vitesse $\frac{1}{2}$, càd., en dimensions, $v_g = c/2$. On vérifiera que $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ (Exercices 3.5). La situation est résumée sur la Fig. 3.3

Ce résultat nous amène à revoir notre expression pour l'amplitude A en introduisant une coordonnée mouvante à la vitesse de groupe :

$$\xi = X - \frac{T}{2} = \delta\left(x - \frac{t}{2}\right). \quad (\text{A.25})$$

Pour étudier l'évolution de A sur les temps très longs, nous introduisons l'échelle de temps lente

$$\tau = \delta^2 t \quad (\text{A.26})$$

et écrivons cette fois :

$$\varphi = (A(\xi - iY, \tau)e^{i(x-t)+y} + \text{c.c.}) + \delta^2 \varphi_2(x - t, y, \xi, Y, \tau) + \dots, \quad (\text{A.27})$$

(On a omis le terme φ_1 : il est en toute généralité donné par $C(\xi, \tau)e^{i(x-t)} + \text{c.c.}$, où C est une amplitude encore indéterminée, mais ce terme ne jouera aucun rôle dans la suite du présent calcul.) Calculons :

$$0 = \varphi_y + \varphi_{tt} = \delta^2 \left\{ \varphi_{2,y} + \varphi_{2,tt} + \left[\left(\frac{1}{4} A_{\xi\xi} - 2iA_\tau \right) e^{i(x-t)} + \text{c.c.} \right] \right\} \quad (\text{A.28})$$

3. Des termes divergeant de la sorte dans des développements asymptotiques sont qualifiés de *séculaires*, en référence à des calculs de trajectoires astronomiques qui devenaient imprécis sur des durées de l'ordre du siècle. Les calculs perturbatifs à l'époque de Poincaré (1854-1912) contenaient souvent de tels termes, à la grande consternation des savants de l'époque.

Comme à l'ordre précédent, pour éviter la présence de termes séculaires dans φ_2 , il nous faut supposer le terme entre crochets égal à zéro. Cela donne

$$iA_\tau - \frac{1}{8}A_{\xi\xi} = 0, \quad (\text{A.29})$$

ou, en posant $\psi = A^*$ et en renormalisant légèrement ξ ,

$$i\psi_\tau + \frac{1}{2}\psi_{\xi\xi} = 0. \quad (\text{A.30})$$

On reconnaît là, l'équation de Schrödinger de la mécanique quantique associée à un potentiel nul, ou encore l'équation d'onde en électromagnétisme dans l'approximation paraxiale. Si on réécrit l'équation pour A en dimensions, on trouve

$$\frac{-1}{\omega\delta^2}iA_t + \frac{1}{8\delta^2k^2}A_{xx} = 0 \quad \rightarrow \quad -iA_t + \frac{\beta}{2}A_{xx} = 0. \quad (\text{A.31})$$

où $\beta = \frac{\omega}{4k^2} = \frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}$ est le *coefficient de dispersion* chromatique.

On vérifiera (Exercice 3.6) que la solution de (A.30) avec la condition initiale $\psi(x, 0) = e^{-\xi^2}$ est donnée par

$$\psi = \frac{e^{-\xi^2/(1+2i\tau)}}{\sqrt{1+2i\tau}}, \quad (\text{A.32})$$

et, comme illustré en Fig. 3.4, ce profil s'étale dans le temps, de manière tout à fait analogue à la diffraction de rayons gaussiens en optique.

Passons à présent à l'analyse des effets non linéaires. Les effets de déplacement à la vitesse de groupe et de dispersion chromatique seront couplés aux effets non linéaires, si l'amplitude du paquet d'ondes est d'ordre ϵ . Nous allons donc reprendre le développement asymptotique précédent, en choisissant le petit paramètre $\delta = \epsilon$

$$\begin{aligned} \varphi &= (A(\xi - iY, \tau)e^{i(x-t)+y} + \text{c.c.}) + \epsilon\varphi_1(x-t, y, \xi, Y, \tau) + \dots, \\ \eta &= (iA(\xi, \tau)e^{i(x-t)} + \text{c.c.}) + \epsilon\eta_1(x-t, \xi, \tau) + \dots, \\ \xi &= \epsilon(x-t/2), Y = \epsilon y, \tau = \epsilon^2 t. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

D'autre part, les conditions aux bords doivent être revues pour tenir compte des termes non linéaires et du fait qu'elles ne sont pas évaluées exactement

en $y = 0$. On a, pour la première,

$$\begin{aligned}
& \varphi_t(\epsilon\eta) + \eta + \frac{\epsilon}{2} (\varphi_x(\epsilon\eta)^2 + \varphi_y(\epsilon\eta)^2) = 0, \\
\rightarrow & \varphi_t(0) + \epsilon\eta\varphi_{yt}(0) + \frac{\epsilon^2\eta^2}{2}\varphi_{tyy}(0) + \eta + \frac{\epsilon}{2} (\varphi_x^2(0) + \varphi_y^2(0)) \\
& + \epsilon^2\eta(\varphi_x(0)\varphi_{xy}(0) + \varphi_y(0)\varphi_{yy}(0)) + \dots = 0, \\
\rightarrow & \varphi_t(0) + \eta = -\epsilon \left(\eta\varphi_{yt}(0) + \frac{1}{2} (\varphi_x^2(0) + \varphi_y^2(0)) \right) \\
& - \epsilon^2 \left(\frac{\eta^2}{2}\varphi_{tyy}(0) + \eta(\varphi_x(0)\varphi_{xy}(0) + \varphi_y(0)\varphi_{yy}(0)) \right) + \dots \text{(A.34)}
\end{aligned}$$

et, pour la seconde,

$$\begin{aligned}
& \varphi_y(\epsilon\eta) - \eta_t = \epsilon\varphi_x(\epsilon\eta)\eta_x, \\
\rightarrow & \varphi_y(0) + \epsilon\eta\varphi_{yy}(0) + \frac{\epsilon^2\eta^2}{2}\varphi_{yyy}(0) - \eta_t = \epsilon\varphi_x(0)\eta_x + \epsilon^2\eta\varphi_{xy}(0)\eta_x + \dots, \\
\rightarrow & \varphi_y(0) - \eta_t = \epsilon(\varphi_x(0)\eta_x - \eta\varphi_{yy}(0)) + \epsilon^2 \left(\eta\varphi_{xy}(0)\eta_x - \frac{\eta^2}{2}\varphi_{yyy}(0) \right) + \dots, \\
& \text{(A.35)}
\end{aligned}$$

Nous devons résoudre (A.34)-(A.35) en nous rappelant que, par les multiples échelles introduites dans les arguments des fonctions,

$$\partial_x \rightarrow \partial_z + \epsilon\partial_\xi, \quad \partial_y \rightarrow \partial_y + \epsilon\partial_Y, \quad \partial_t \rightarrow \partial_t - \frac{\epsilon}{2}\partial_\xi + \epsilon^2\partial_\tau. \quad \text{(A.36)}$$

À l'ordre ϵ , nous trouvons

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,t} + \eta_1 &= \frac{1}{2}\varphi_{0,\xi} - \eta_0\varphi_{0,yt} - \frac{1}{2}(\varphi_{0,x}^2 + \varphi_{0,y}^2) \\
&= \frac{1}{2}A_\xi e^{i(x-t)} - A^2 e^{2i(x-t)} + \text{c.c.} \quad \text{(A.37)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,y} - \eta_{1,t} &= i\varphi_{0,\xi} - \frac{1}{2}\eta_{0,\xi} + \varphi_{0,x}\eta_{0,x} - \eta_0\varphi_{0,yy} \\
&= \frac{i}{2}A_\xi e^{i(x-t)} - 2iA^2 e^{2i(x-t)} + \text{c.c.} \quad \text{(A.38)}
\end{aligned}$$

On résout cela tranquillement : de la première équation, on tire

$$\eta_1 = -\varphi_{1,t} + \frac{1}{2}A_\xi e^{i(x-t)} - A^2 e^{2i(x-t)} + \text{c.c.}, \quad \text{(A.39)}$$

ce qui, dans la seconde, donne

$$\varphi_{1,y} + \varphi_{1,tt} = -\frac{i}{2}A_\xi e^{i(x-t)} + 2iA^2 e^{2i(x-t)} + \frac{i}{2}A_\xi e^{i(x-t)} - 2iA^2 e^{2i(x-t)} + \text{c.c.} = 0 \quad \text{(A.40)}$$

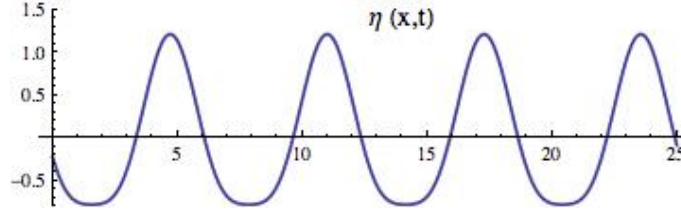


FIGURE A.1 – Profil de vague non linéaire, d'après calcul au deuxième ordre.

On a donc

$$\varphi_1 = 0, \quad \eta_1 = \frac{1}{2}A_\xi e^{i(x-t)} - A^2 e^{2i(x-t)} + \text{c.c.} \quad (\text{A.41})$$

Sans connaître encore l'évolution de A , on peut déjà remarquer quelque chose d'intéressant : supposons $A = \text{const.} = a/2$. Dans ce cas, on a $\eta \sim -a \sin(x-t) - \epsilon \frac{a^2}{2} \cos(2(x-t))$. Pour une amplitude a et un petit ϵ donnés, on trouve le profil de vague en Fig. A.1 : plus plat dans les creux et pointu aux crêtes.

Enfin à l'ordre ϵ^3 , la première équation devient, après calcul :

$$\varphi_{2,t} + \eta_2 = - \left(\frac{3i}{2}|A|^2 A + A_\tau \right) e^{i(x-t)} + 2iAA_\xi e^{2i(x-t)} - \frac{3i}{2}A^3 e^{3i(x-t)} + \text{c.c.} \quad (\text{A.42})$$

La seconde condition aux bords donne

$$\begin{aligned} \varphi_{2y} - \eta_{2t} &= 2A^* A_\xi + \left(\frac{-5}{2}|A|^2 A + iA_\tau - \frac{1}{4}A_{\xi\xi} \right) e^{i(x-t)} - 4AA_\xi e^{2i(x-t)} \\ &\quad + \frac{9}{2}A^3 e^{3i(x-t)} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

En dérivant la première équation par rapport à t et en l'additionnant à la seconde, nous trouvons

$$\varphi_{2y} + \varphi_{2tt} = 2A^* A_\xi + \left(-4|A|^2 A + 2iA_\tau - \frac{1}{4}A_{\xi\xi} \right) e^{i(x-t)} + \text{c.c.} \quad (\text{A.44})$$

La condition de solvabilité est donc, finalement,

$$2iA_\tau - \frac{1}{4}A_{\xi\xi} - 4|A|^2 A = 0. \quad (\text{A.45})$$

En posant $\psi = A^*$, et après une simple remise à l'échelle de ξ et τ , nous pouvons la réécrire sous la forme standard

$$\boxed{i\psi_\tau + \frac{1}{2}\psi_{\xi\xi} + |\psi|^2\psi = 0.} \quad (\text{A.46})$$

Il s'agit de la fameuse *équation de Schrödinger nonlinéaire* (NLS -nonlinear Schrödinger equation), qui apparaît dans un grand nombre de contextes : plasma, optique, méca. Gardons bien à l'esprit qu'elle décrit l'évolution d'un paquet d'ondes (ici : de vagues), car ψ est une amplitude lentement variable qui multiplie des oscillations spatio-temporelles.