Chapitre 4 : Les modèles dynamiques

Introduction

Le point de départ de ce chapitre est l'équilibre du marché en concurrence pure et parfaite que nous avions décrit pour donner un exemple simple de résolution d'un modèle. Ce modèle s'écrivait :

Equation de comportement 1 : demande :

$$q^d = \alpha - \beta p \qquad (\alpha, \beta > 0) \qquad (1.1)$$

Equation de comportement 2 : offre :

$$q^s = -\gamma + \mu p \qquad (\gamma, \eta > 0) \qquad (1.2)$$

Condition d'équilibre :

$$q^s = q^d \qquad (1.3)$$

En résolvant le modèle, on obtient le prix et la quantité d'équilibre.

$$p = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\mu} \qquad (1.4)$$

$$q^s = q^d = q = \frac{\alpha\mu-\beta\gamma}{\beta+\mu} \qquad (1.5)$$

En résolvant le modèle, nous ne nous sommes pas posé la question de savoir comment on pouvait arriver à l'équilibre.

Par conséquent, nous sommes incapables de dire combien de temps il faut pour y parvenir, par quel chemin on va y parvenir, ni tout simplement si on y parviendra.

Ces limites sont celles de tous les modèles statiques. Ces modèles permettent de comparer des équilibres entre eux lorsqu'on fait varier un paramètre, mais sont incapables de décrire le passage d'un équilibre à l'autre.

Cela n'a rien d'étonnant dans la mesure où les modèles statiques font par définition abstraction du temps.

Pour combler ces lacunes, il est nécessaire de donner une dimension dynamique au modèle, c'est-à-dire d'intégrer la dimension du temps dans ces modèles. Nous avons déjà vu dans le chapitre 2 qu'il existait deux façons de représenter le temps, le temps discret et le temps continu. Il existe donc deux types de modèles dynamiques, les uns en temps discret les autres en temps continu. Ces deux types de modèles utilisent des outils mathématiques différents. Dans ce chapitre, nous allons donc les étudier séparément, en consacrant la première section aux modèles en temps discret et la seconde en temps continu.

Section 1 : Dynamique en temps discret

La dynamique d'un marché en temps discret est décrite dans le modèle canonique du Cobweb (I). Si on peut obtenir quelques intuitions en étudiant graphiquement le comportement du modèle, son analyse algébrique suppose de savoir résoudre une équation de récurrence linéaire du premier ordre à coefficients constants (II).

I. Présentation et résolution graphique du modèle du cobweb

Le modèle du cobweb introduit de façon très simple la question de la stabilité de l'équilibre dans un modèle de concurrence pure et parfaite. La présentation systématique du modèle remonte à un article paru en 1938 de l'économiste américain Mordecai Ezekiel, qui travaillait sur le cycle du porc. Son intuition serait cependant apparue presque simultanément en 1930 dans des articles publiés en allemand par Henry Schultz (américain, de l'école de

Chicago), Jan Tinbergen (néerlandais, prix Nobel 1969) et Umberto Ricci (italien, membre de l'école de Lausanne).[1] Son nom serait dû à un cinquième économiste, Nicholas Kaldor (hongrois qui fit carrière à Cambridge). Il signifie toile d'araignée en anglais et fait référence à l'aspect de sa représentation graphique.

L'idée du modèle du cobweb est de supposer que l'offre s'adapte avec une période de retard aux variations du prix. Cette hypothèse est par exemple pertinente sur les marchés agricoles, où les quantités produites doivent être décidées longtemps à l'avance.

On doit donc réécrire le modèle d'équilibre du marché en y ajoutant des indices temporels :

Equation de comportement 1 : demande :

$$q_t^d = \alpha - \beta p_t \qquad (\alpha, \beta > 0) \tag{4.1}$$

Equation de comportement 2 : offre :

$$q_t^s = -\gamma + \mu p_{t-1} \qquad (\gamma, \eta > 0) \tag{4.2}$$

Condition d'équilibre :

$$q_t^s = q_t^d \tag{4.3}$$

Il faut à présent bien noter les indices, puisque l'offre et la demande dépendent du prix de deux périodes différentes. Cela n'enlève rien au fait que le prix de la période courante s'ajuste en fonction des quantités offertes et demandées courantes. Cela implique que c'est la demande qui va s'ajuster, alors que l'offre d'une période est entièrement inélastique au prix courant.

[1] M. Ezekiel "The cobweb theorem", *Quarterly Journal of Economics*, vol. 52 n°2, p. 255-280, 1938. H. Schultz "Der Sinn der Statistischen Nachfragen", *Veröffentlichungen der Frankfurter Gesellschaft für Konjunkturforschung*, vol.10, Kurt Schroeder Verlag, Bonn. 1930, J. Tinbergen "Bestimmung und Deutung von Angebotskurven, ein Beispiel", *Zeitschrift für National Ökonomie*, Wien, vol.1 n°5, p.671, 1930), et U. Ricci "Die synthetische Ökonomie von Henry Ludwell Moore", *Zeitschrift für Nationalökonomie*, vol.1 n°5, p.656, 1930. Nicholas Kaldor "A classificatory note on the determinateness of equilibrium", *Review of Economic Studies*, vol.1, p. 122, 1934.

Si on suppose que l'équilibre existe à long terme, on peut facilement résoudre le modèle en supposant $p_t = p_{t-1}$. On retrouve alors tout simplement le modèle du premier chapitre :

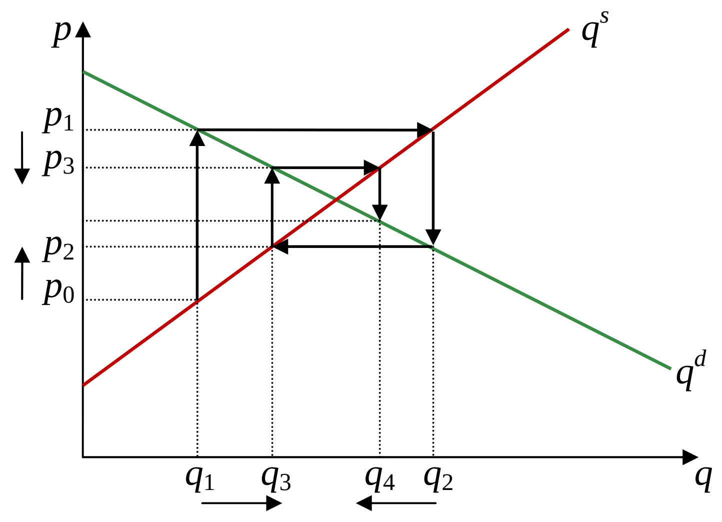
$$\bar{p} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\mu} \qquad (1.4)$$

$$q^s = q^d = \bar{q} = \frac{\alpha\mu-\beta\gamma}{\beta+\mu} \qquad (1.5)$$

Cependant, si cette solution existe bien, rien ne nous permet pour l'instant d'affirmer que le modèle va y converger si le prix initial du bien est différent du prix d'équilibre. Il n'est pas non plus possible de savoir comment le marché va y converger, s'il y converge jamais.

Pour obtenir une première intuition des mécanismes à l'œuvre, supposons que le prix de marché initial soit $p_0 < \bar{p}$ et représentons graphiquement l'évolution des prix et des quantités produites :[2]

Graphique 4.1 : cobweb convergent



Pour construire et lire le graphique 4.1 ci-dessus, on part du point d'ordonnées p_0 sur la courbe d'offre. Ce point nous indique la quantité qui sera produite en première période q_1. Comme il faut que la demande s'ajuste à cette

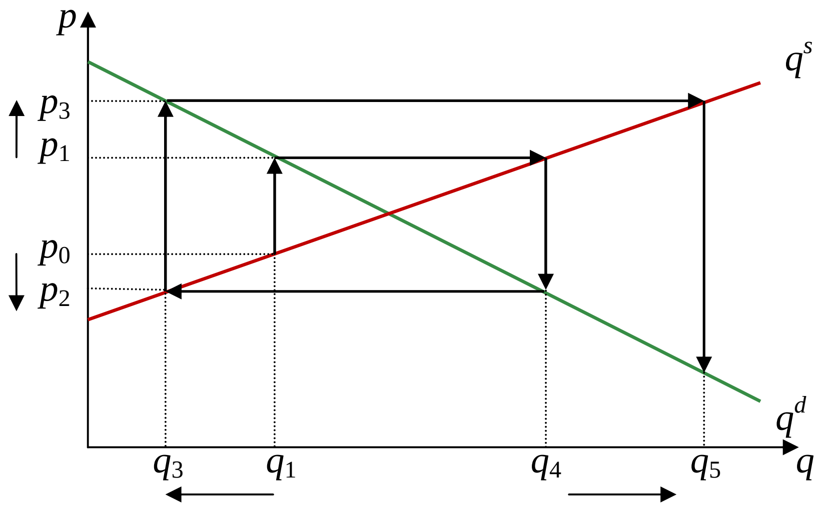
[2] Vous pourrez à titre d'exercice considérer le cas où $p_0 > \bar{p}$.

quantité, on lit le prix p_1 le long de la courbe de demande. L'offre de la deuxième période est alors donnée par la courbe d'offre au point d'ordonnées p1.

Lorsqu'on construit le graphique, on constate que le prix et la quantité fluctuent mais qu'ils se rapprochent de plus en plus de l'équilibre de long terme. Les *oscillations* sont donc *convergentes*.

Toutefois, rien ne garantit que le marché converge vers l'équilibre. Le graphique 4.2 ci-dessous représente un autre marché dont le prix de départ est le même que précédemment. On y suit l'évolution des prix et des quantités de la même façon que dans le cas précédent.

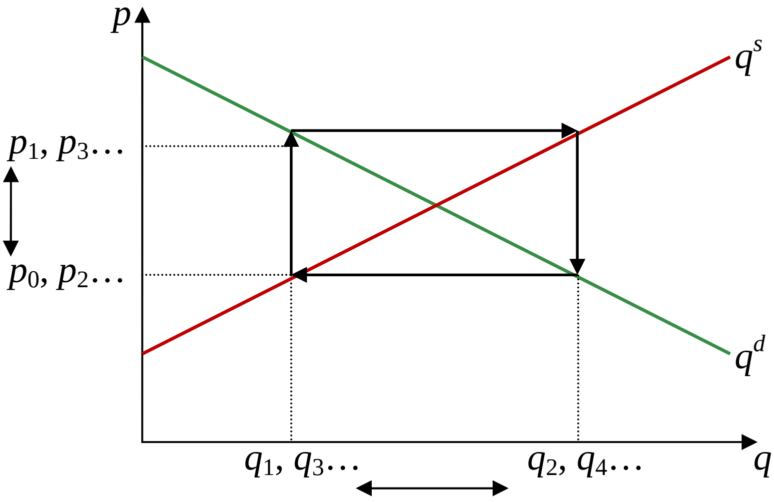
Graphique 4.2 : cobweb divergent



Dans ce cas on constate que, s'il y a toujours des fluctuations, on s'éloigne en revanche de l'équilibre de long terme au lieu de s'en rapprocher. On est donc en présence d'*oscillations divergentes*.

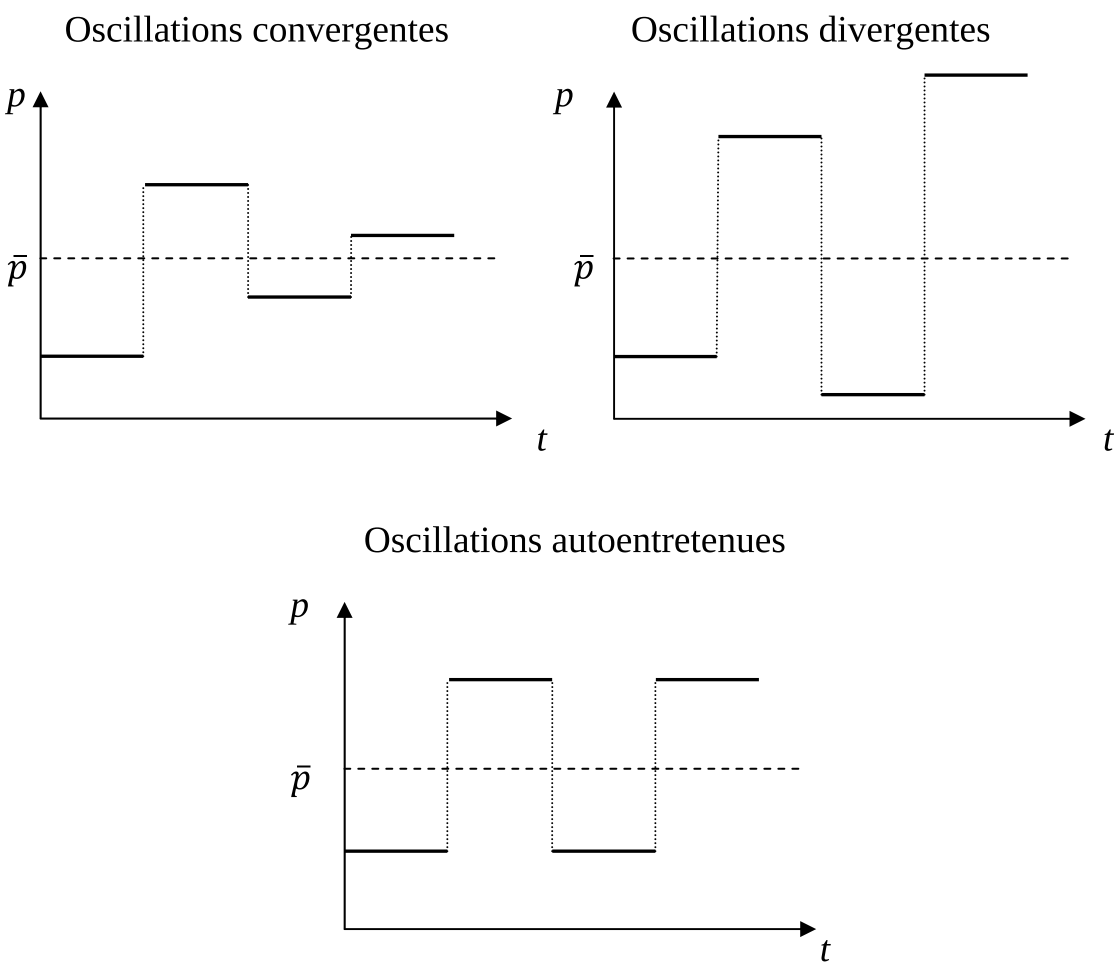
Enfin, entre les deux cas précédents, on peut assister à des fluctuations auto-entretenues. C'est ce que représente le graphique 4.3 :

Graphique 4.3 : cobweb cyclique



Les trois graphiques ci-dessous résument l’évolution des prix d’une période à l’autre dans les deux cas.

Graphique 4.3 : Oscillations du prix dans le modèle du cobweb



La question est maintenant de savoir pourquoi un marché a convergé et pas l'autre. Pour répondre à cette question, nous devons résoudre le modèle analytiquement.

II. Les équations de récurrence linéaires du premier ordre à coefficients constants

La condition d'équilibre du modèle du cobweb permet d'exprimer le prix de la période courante en fonction du prix de la période précédente.

$$q_t^d = \alpha - \beta p_t \qquad (4.1)$$

$$q_t^s = -\gamma + \mu p_{t-1} \qquad (4.2)$$

$$q_t^d = q_t^s \qquad (4.3)$$

D'où :

$$\alpha - \beta p_t = -\gamma + \mu p_{t-1}$$

$$p_t = -\frac{\mu}{\beta} p_{t-1} + \frac{\alpha+\gamma}{\beta} \qquad (4.4)$$

Cette expression définit une *équation de récurrence linéaire d'ordre un à coefficients constants*. C'est une équation de récurrence parce que la valeur de *p* est exprimée en fonction de sa valeur passée. Son ordre est un parce que la valeur de *p* ne dépend que de sa valeur au cours de la période précédente. Elle est linéaire parce que la relation entre la variable et sa valeur passée est linéaire. Enfin, ses coefficients sont constants puisqu'ils ne dépendent pas du temps.

Lorsqu'on résout une équation de ce type, on cherche à exprimer la variable en fonction du temps au lieu de sa valeur précédente. Nous allons rappeler le principe général de résolution de ce type d'équations (A) avant de l'appliquer au modèle du cobweb (B).

A. Résolution d'une équation de récurrence linéaire du premier ordre à coefficients constants

Dans le modèle du cobweb l'évolution du prix est décrite par une équation de récurrence linéaire d'ordre un à coefficients constants, dont la forme générale est :

$$y_t = ay_{t-1} + b \tag{4.5}$$

Le principe général de résolution d'une équation de récurrence linéaire repose sur le fait que la solution générale de l'équation est égale à la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière.

Pour résoudre une équation de récurrence, la première étape consiste donc à *résoudre l'équation homogène associée*, c'est-à-dire résoudre l'équation en annulant le terme constant *b*.

$$y_t = ay_{t-1} \tag{4.5}$$

Selon cette équation, *y* suit une progression géométrique d'ordre a. Or on sait que la solution d'une telle équation est simplement :

$$y_t = Aa^t \tag{4.6}$$

Dans une deuxième étape, on doit *trouver une solution particulière* de l'équation. Dans le cas présent, on peut tester le cas où *y* est constant :

$$y_t = Z \tag{4.7}$$

En remplaçant y_t par sa valeur dans l'équation initiale, on détermine la valeur de *Z* :

$$Z = aZ + b$$

$$\Leftrightarrow Z = \frac{b}{1-a} \tag{4.8}$$

Dans une troisième étape *on obtient la solution générale* de l'équation en additionnant la solution générale de l'équation homogène et la solution particulière :

$$y_t = Aa^t + Z$$

$$y_t = Aa^t + \frac{b}{1-a} \tag{4.9}$$

La quatrième et dernière étape consiste à *utiliser les conditions initiales* pour déterminer le paramètre *A*.

$$y_0 = Aa^0 + \frac{b}{1-a}$$

$$y_0 = A + \frac{b}{1-a}$$

$$A = y_0 - \frac{b}{1-a} \tag{4.9}$$

On obtient ainsi la solution de l'équation :

$$y_t = \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^t + \frac{b}{1-a} \tag{4.10}$$

On voit que cette solution est la somme d'un terme constant et d'un terme exponentiel. L'évolution de y va donc essentiellement dépendre de la valeur de a. La valeur de ce paramètre va en particulier déterminer si la solution converge ou diverge, et si son évolution va osciller ou suivre une évolution monotone.

On comprend facilement que la solution oscillera ou non en fonction du signe de a. En effet si a est positif, a^t sera toujours positif et son évolution sera donc monotone.

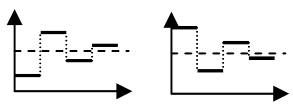
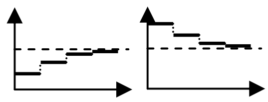
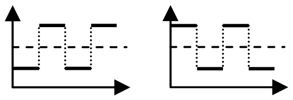
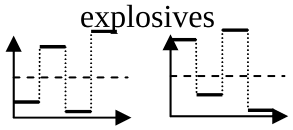
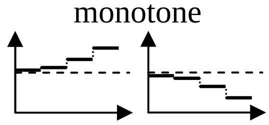
Si a est négatif, a^t sera en revanche positif à chaque fois que t sera pair et négatif quand t sera impair. On observera donc des fluctuations.

Enfin, si a est égal à zéro, la valeur de a^t sera toujours nulle, et y_t sera toujours égal à la constante $b/(1 - a)$.

La solution va converger si la limite de y_t lorsque t tend vers l'infini et finie. Ce sera le cas si a est inférieur à un. En effet la limite en l'infini de a^t va tendre vers zéro si la valeur absolue de a est inférieure à un. a^t pourra être égal à plus ou moins l'infini si la valeur absolue de a est supérieure à un. Il y aura donc divergence si la valeur absolue de a est supérieure à un. Dans le cas intermédiaire, la solution sera constante ou oscillera de façon régulière autour de la constante $b/(1 - a)$.

Le tableau ci-dessous résume les sept cas de figure qui peuvent se présenter :

Tableau 4.1. : Solutions d'une équation de récurrence linéaire de premier ordre à coefficients constants

Oscillations / Convergence	$a < 0$ Oscillations	$a = 0$ Constante	$a > 0$ Pas d'oscillations
$\|a\| < 1$ Convergence	Oscillations amorties 	$y_t = b$	Convergence monotone 
$\|a\| = 1$ Stabilité	Oscillations autoentretenues 		$y_t = y_{t-1}$
$\|a\| > 1$ Divergence	Oscillations explosives 		Divergence monotone 

B. Résolution analytique du modèle du cobweb

Nous avons vu que le modèle du Cobweb permettait de représenter l'évolution du prix du bien comme une équation de récurrence linéaire d'ordre un à coefficients constants :

$$p_t = -\frac{\mu}{\beta} p_{t-1} + \frac{\alpha+\gamma}{\beta} \qquad (4.4)$$

On retrouve donc bien ainsi une équation de récurrence de la forme $y_t = a y_{t-1} + b$, avec $a \equiv -\frac{\mu}{\beta}$ et $b \equiv \frac{\alpha+\gamma}{\beta}$.

On pourrait reprendre la résolution complète de l'équation, mais, pour gagner du temps, nous allons simplement remplacer a et b par leur valeur dans les cas standards isolés précédemment.

En particulier, on peut facilement déterminer si le prix oscille ou évolue de façon monotone, et s'il converge ou diverge.

Pour déterminer si la variable oscille, il suffit d'observer le signe du coefficient a. On sait que la variable évolue de façon monotone s'il est positif et oscille sinon.

Or, comme μ et β sont par hypothèse positifs, a est strictement négatif. Par conséquent, on sait que le prix oscille.

On peut cependant remarquer que la demande de certains biens peut être une fonction décroissante du prix. C'est le cas des biens Giffen, comme la pomme de terre en Irlande au XIXème siècle, et les biens Veblen, biens de luxe. Pour ce type de biens, la demande est croissante, et $\beta < 0$.

De même, l'offre de certains biens peut être décroissante. C'est par exemple le cas des biens dont le marché est concurrentiel mais pour lesquels il existe des économies d'échelle externe, qui font baisser le coût moyen de production lorsque la production du secteur augmente. Pour ces biens, il existe une relation décroissante entre le prix et la quantité produite et $\mu < 0$. Dans les deux cas, le coefficient a serait positif et l'évolution des prix serait monotone.

On doit à présent déterminer si les oscillations du prix convergent ou sont explosives. Pour cela, nous devons étudier la valeur absolue du coefficient $a \equiv -\frac{\mu}{\beta}$. On voit alors apparaître les trois cas que nous avions observé de façon graphique.

1er cas : Il y aura convergence si $|a| = \frac{\mu}{\beta} < 1$, ou encore $\mu < \beta$.

2ème cas : Il y aura divergence si $|a| = \frac{\mu}{\beta} > 1$, ou encore $\mu > \beta$.

3ème cas : Les oscillations seront autoentretenues si $|a| = \frac{\mu}{\beta} = 1$, ou $\mu = \beta$.

On voit par conséquent que ce qui fait que le prix converge ou diverge est le rapport entre la pente de l'offre et celle de la demande.

Si l'offre est moins sensible au prix que la demande ($\mu < \beta$), le marché convergera vers son équilibre de long terme.

Si l'offre est en revanche plus sensible au prix que la demande ($\mu > \beta$), le marché s'éloignera de son équilibre de long terme.

Entre les deux situations, si les deux pentes sont égales ($\mu = \beta$), le marché oscillera indéfiniment.

L'exemple du modèle du cobweb est très important parce qu'il rappelle que ce n'est pas parce qu'on peut définir l'équilibre d'un modèle que cet équilibre va être atteint. Tout peut dépendre des conditions initiales.

En effet, dans le cas où il y a divergence, l'équilibre ne pourra exister que si le marché s'y trouve initialement. Sinon, quelle que soit la situation initiale, le marché s'éloignera spontanément de l'équilibre.

De plus, même si le marché se trouve en situation d'équilibre initial, la moindre perturbation, si petite soit-elle, placera le marché sur une trajectoire qui l'éloignera de plus en plus de l'équilibre. L'équilibre sera donc *instable*. Il est donc important de distinguer les équilibres stables des équilibres instables, qui n'ont en pratique aucune chance de se réaliser.

Le corolaire de cette remarque est qu'il faut interpréter avec beaucoup de précaution les résultats de la statique comparative. La statique comparative compare des équilibres entre eux. Cependant, si ces équilibres existent, il n'est en aucun cas garanti que le modèle converge de l'un à l'autre.

Pour s'en convaincre, imaginons que nous voulions décrire l'évolution du marché décrit par le modèle du Cobweb suite à une augmentation exogène de la demande (représentée par l'augmentation du paramètre α). La démarche de la statique comparative consiste à comparer l'équilibre avant et après l'augmentation du paramètre, que ce soit algébriquement ou graphiquement.

Quelle que soit la valeur des paramètres du modèle, on peut toujours définir l'équilibre avant et après l'augmentation du paramètre α, et comparer les deux équilibres. Cependant, si l'offre est plus sensible au prix que la demande ($\mu > \beta$), le marché n'atteindra jamais son nouvel équilibre de long terme. La comparaison est donc trompeuse.

Pour finir, on peut résoudre entièrement l'équation de récurrence afin d'exprimer le prix du marché en fonction du temps. Ici encore, nous allons nous contenter de remplacer a et b par leur valeur dans la solution générale des équations linéaires. Celle-ci s'écrit :

$$y_t = \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^t + \frac{b}{1-a} \qquad (4.10)$$

avec $a \equiv -\frac{\mu}{\beta}$, $b \equiv \frac{\alpha+\gamma}{\beta}$, et $y_t = p_t$.

Cela donne :

$$p_t = \left(p_0 - \frac{\frac{\alpha+\gamma}{\beta}}{1-\left(-\frac{\mu}{\beta}\right)}\right)\left(-\frac{\mu}{\beta}\right)^t + \frac{\frac{\alpha+\gamma}{\beta}}{1-\left(-\frac{\mu}{\beta}\right)})$$

$$p_t = \left(p_0 - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\mu}\right)\left(-\frac{\mu}{\beta}\right)^t + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\mu}$$

$$p_t = (p_0 - \bar{p})\left(-\frac{\mu}{\beta}\right)^t + \bar{p} \qquad (4.11)$$

Cette expression fait apparaître le prix courant en fonction du prix initial et du prix de long terme. Elle montre que le prix de courant ne sera égal au prix de long terme que si le prix initial est égal au prix de long terme.

Dans le cas contraire, le prix courant pourra tendre vers sa valeur de long terme, si $\frac{\mu}{\beta} < 1$, ou connaître une évolution explosive si $\frac{\mu}{\beta} > 1$.

Une autre façon d'obtenir le même résultat est d'exprimer l'écart entre le prix courant et le prix de long terme en fonction de l'écart entre le prix initial et le prix de long terme.

$$(p_t - \bar{p}) = (p_0 - \bar{p})\left(-\frac{\mu}{\beta}\right)^t \qquad (4.12)$$

L'écart ne sera effectivement nul que s'il est nul dès le départ. Il se résorbera si $\frac{\mu}{\beta} < 1$ mais tendra vers l'infini si $\frac{\mu}{\beta} > 1$.

Enfin, l'écart sera toujours du même signe si $\frac{\mu}{\beta} > 0$, et prendra des valeurs successivement positives et négatives si $\frac{\mu}{\beta} < 0$.

Section 2 : Dynamique en temps continu

Les résultats que nous venons de décrire ont été obtenus en temps discret. On peut se demander s'ils restent valables en temps continu. Nous avons vu dans le chapitre 2 que le temps continu peut être interprété comme un cas limite du temps discret, ce qui pourrait nous laisser supposer que les résultats en temps continu ressemblent à ceux obtenus en temps discret. Nous devons cependant le vérifier formellement. C'est ce que nous allons faire dans cette section. Nous allons donc repartir de l'équilibre d'un marché concurrentiel dont nous allons modéliser la dynamique en temps continu (I). Pour en déterminer la solution, nous aurons besoin de connaître la résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants (II).

I. Présentation d'un modèle de marché à prix visqueux

Le modèle de base reste le modèle de marché concurrentiel que nous avons décrit dans le premier chapitre. On y ajoute simplement des indices temporels.

Equation de comportement 1 : demande :

$$q_t^d = \alpha - \beta p_t \qquad (\alpha, \beta > 0) \qquad (4.13)$$

Equation de comportement 2 : offre :

$$q_t^s = -\gamma + \mu p_t \qquad (\gamma, \eta > 0) \qquad (4.14)$$

Condition d'équilibre :

$$q_t^s = q_t^d \qquad (4.15)$$

On peut remarquer que toutes les variables sont contemporaines, au contraire de ce que nous avions décrit dans le modèle du cobweb.

En revanche, le prix et la quantité d'équilibre du marché restent les mêmes que précédemment, soit :

$$\bar{p} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\mu} \qquad (1.4)$$

$$q^s = q^d = \bar{q} = \frac{\alpha\mu-\beta\gamma}{\beta+\mu} \qquad (1.5)$$

L'innovation consiste à supposer que le prix est *visqueux*, c'est-à-dire qu'il ne s'ajuste pas instantanément pour assurer l'équilibre du marché. Plus précisément, on suppose que sa vitesse d'ajustement dépend de l'ampleur du déséquilibre. Ce comportement est décrit par une *équation d'ajustement du prix* qui prend la forme suivante :

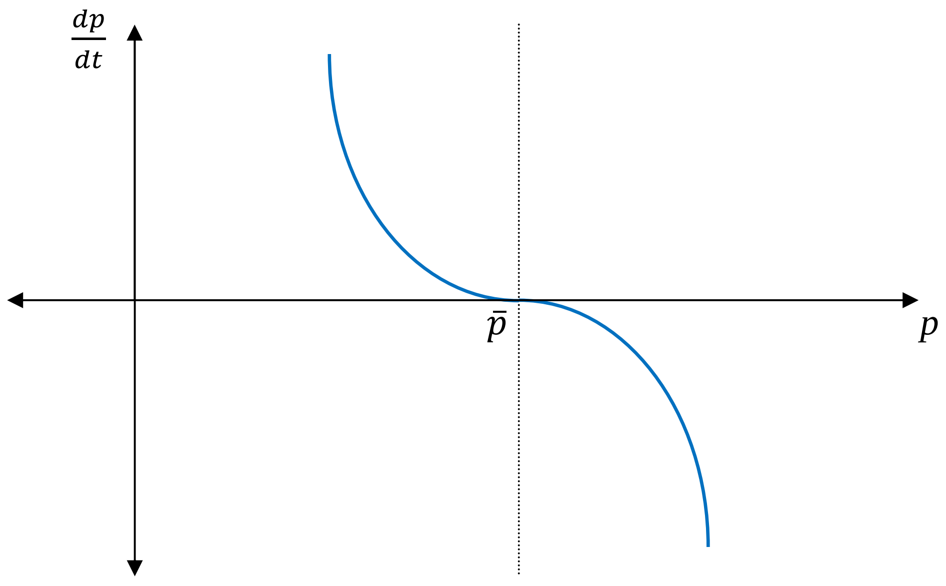
$$\frac{dp}{dt} = k\left(q_t^d - q_t^s\right) \qquad k > 0 \qquad (4.16a)$$

Ou encore :

$$\dot{p} = k\left(q_t^d - q_t^s\right) \qquad k > 0 \qquad (4.16b)$$

La variation du prix est donc proportionnelle à la demande excédentaire. Le prix augmentera donc lorsque la demande sera supérieure à l'offre et diminuera en cas d'offre excédentaire.

Graphique 4.4 : L'équation d'ajustement des prix



De plus, la valeur absolue de la variation sera d'autant plus grande que la valeur absolue du déséquilibre sera grande. Pour mieux visualiser le type d'ajustement que décrit l'équation d'ajustement, on peut la représenter graphiquement. La fonction qui décrit $\bar{p}$ en fonction de p est décroissante et monotone. Cependant, la variation du prix est nulle lorsque $p = \bar{p}$. La fonction connaît donc un point d'inflexion au point d'abscisse $\bar{p}$.

Pour décrire la dynamique du prix, on remplace les quantités offertes et demandées dans l'équation d'ajustement des prix :

$$\frac{dp}{dt} = k\left(q_t^d - q_t^s\right) \qquad (4.16a)$$
$$= k[(\alpha - \beta p_t) - (-\gamma + \mu p_t)]$$
$$= k[\alpha - \beta p_t + \gamma - \mu p_t]$$

$$\frac{dp}{dt} = -k(\beta + \mu)p_t + k(\alpha + \gamma) \qquad (4.17)$$

On obtient ainsi une *équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants*. C'est une équation différentielle du premier ordre parce qu'elle fait intervenir la variable et sa dérivée première, et seulement sa dérivée première. Elle est linéaire parce que la relation entre les deux est linéaire. Enfin, elle est à coefficients constants parce que les coefficients sont indépendants du temps.

Si nous voulons exprimer l'évolution du prix en fonction du temps, nous devons résoudre cette équation différentielle. Ceci est l'objet de la prochaine section.

II. Les équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

Comme précédemment, nous allons rappeler le principe général de résolution équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants (A) avant de l'appliquer à notre modèle du marché (B). On remarquera tout au long de la section la similarité entre les équations différentielles et les équations de récurrence.

A. Résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants

La forme générale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants est :

$$\frac{dy_t}{dt} = ay_t + b \qquad (4.18a)$$

Ou :

$$\dot{y}_t = ay_t + b \qquad (4.18b)$$

Comme toutes les variables sont contemporaines, on omet aussi souvent l'indice *t*, ce qui donne :

$$\frac{dy}{dt} = ay + b \qquad (4.18c)$$

$$\dot{y} = ay + b \qquad (4.18d)$$

Le principe général de résolution d'une équation différentielle linéaire repose sur le fait que la solution générale de l'équation est égale à la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière.

Comme pour résoudre une équation de récurrence, la première étape de la résolution d'une équation différentielle consiste donc à *résoudre l'équation homogène associée*, c'est-à-dire résoudre l'équation en annulant le terme constant *b*.

$$\frac{dy}{dt} = ay \qquad (4.19)$$

On cherche donc une fonction qui soit proportionnelle à sa propre dérivée. Pour cela, on peut se base sur le fait que la fonction exponentielle est sa propre dérivée. La solution de l'équation homogène doit donc être une fonction exponentielle. Plus précisément, elle doit être de la forme $y = A\mathrm{e}^{rt}$. On vérifie en effet que, dans ce cas :

$$\frac{dy}{dt} = Ar\mathrm{e}^{rt} = ry \qquad (4.20)$$

Il suffit donc de poser $r = a$ pour obtenir la solution de l'équation homogène :

$$y = A\mathrm{e}^{at} \qquad (4.21)$$

Dans une deuxième étape, on doit *trouver une solution particulière* de l'équation. Comme dans le cas des équations de récurrence, on peut tester le cas où y est constant : $y = Z$.

On cherche alors à déterminer à quelle condition cette fonction peut être une solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dZ}{dt} = aZ + b$$

$$\Leftrightarrow 0 = aZ + b$$

$$\Leftrightarrow Z = -\frac{b}{a} \qquad (4.22)$$

On obtient ainsi une solution particulière de l'équation.

La troisième étape consiste à *obtenir la solution générale* de l'équation en additionnant la solution générale de l'équation homogène et la solution particulière :

$$y = A\mathrm{e}^{at} + Z$$

$$y = A\mathrm{e}^{at} - \frac{b}{a} \qquad (4.23)$$

La quatrième et dernière étape consiste à *utiliser les conditions initiales* pour déterminer le paramètre *A*.

$$y_0 = Aa^0 - \frac{b}{a}$$

$$y_0 = A - \frac{b}{a}$$

$$A = y_0 + \frac{b}{a} \qquad (4.24)$$

On réécrit ainsi la solution générale de l'équation :

$$y_t = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{at} - \frac{b}{a} \qquad (4.25)$$

Ici encore, on voit que la solution est la somme d'un terme constant et d'un terme exponentiel. L'évolution de *y* va donc essentiellement dépendre de la valeur de *a* et *A*. La valeur de ces paramètres va en particulier déterminer si la solution croît ou décroît, et si elle converge ou diverge.[3]

Plus précisément, c'est la valeur de a qui va déterminer si la solution converge ou diverge. En effet, si *a* est négatif, e^{at} tendra vers zéro lorsque *t* tendra vers l'infini. La solution convergera donc.

Si *a* est positif, e^{at} tendra vers l'infini lorsque *t* tendra vers l'infini. La solution sera donc divergente.

Pour déterminer si la solution croît ou décroît, on doit déterminer le signe de sa dérivée :

$$\frac{dy}{dt} = Aa\mathrm{e}^{at} \qquad (4.26)$$

[3] On peut noter que comme la fonction exponentielle est toujours positive, *y* ne pourra pas osciller autour du terme constant.

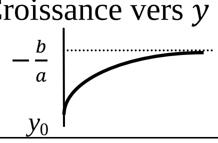
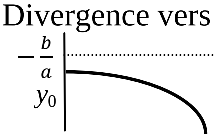
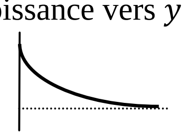
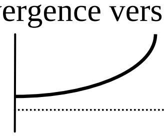
C’est donc le signe du produit de A et a qui déterminera le comportement de la fonction. Si les deux paramètres sont de même signe, la dérivée sera positive et la fonction croissante. Si leurs signes sont opposés, la dérivée sera négative et la fonction décroissante.

Enfin, si A est nul, la dérivée sera nulle et la solution constante. Ce cas correspond à la situation où la valeur initiale de y est égale à la solution constante.

On peut remarquer que les paramètres structurels du modèle déterminent seuls si la solution va être convergente ou non. En revanche, il est nécessaire de connaître les conditions initiales pour savoir si la solution croît ou décroît.

Le tableau ci-dessous résume les différents types de solutions :

Tableau 4.2. : Solutions d’une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants

	$a < 0$ Convergence	$a > 0$ Divergence
$A < 0$	Croissance vers $y = -\frac{b}{a}$ 	Divergence vers $-\infty$ 
$A = 0$	Equilibre stable $y = -\frac{b}{a}$	Equilibre instable $y = -\frac{b}{a}$
$A > 0$	Décroissance vers $y = -\frac{b}{a}$ 	Divergence vers $+\infty$ 

Le cas où $A = 0$ est intéressant. L’expression (4.23) montre que y est alors constant, puisqu’il prend d’emblée sa valeur d’équilibre. Cela ne signifie par pour autant que le signe de *a* soit sans intérêt. Au contraire, son signe va déterminer la stabilité de l'équilibre.

Si *a* est positif, toute valeur initiale de *y* qui ne correspond par exactement à l'équilibre va se traduire par une trajectoire divergente. Cela signifie que même si l'économie se trouve initialement à l'équilibre, la moindre perturbation même temporaire de *y* va le placer sur une trajectoire divergente. Il ne revient donc pas à sa valeur d'équilibre en cas de perturbation. L'équilibre est donc *instable*.

Si *a* est au contraire négatif, *y* n'aura pas tendance à diverger. Il sera ramené vers sa valeur d'équilibre. En d'autres termes, il augmentera s'il est passé sous sa valeur d'équilibre et diminuera sinon. L'équilibre sera alors *stable*.

Il est important de distinguer les équilibres stables des équilibres instables. En effet, si un équilibre est instable, il a une probabilité infinitésimale d'exister en pratique, et quand bien même il existerait, la moindre perturbation le ferait disparaître.

On ne considérera donc pas que les équilibres instables des modèles économiques décrivent une situation réelle. On pourra toutefois parfois les interpréter comme des cas limites entre des trajectoires qui convergent vers des équilibres stables.[4]

On peut regretter que la solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants soit moins riche que celle d'une équation de récurrence linéaire de premier ordre à coefficients constants. Elle ne permet en effet pas de faire apparaître d'oscillations.

Cela ne signifie pas pour autant que les oscillations sont impossibles en temps continu. Il suffit en effet de considérer des équations différentielles un

[4] Un exemple d'équilibre instable est celui d'un rasoir qui serait en équilibre sur son fil. Cet équilibre est théoriquement possible. Il n'a en revanche aucune chance de se réaliser en pratique. Cet équilibre détermine cependant la limite entre deux trajectoires ; celle qui fait tomber le rasoir vers la gauche ou vers la droite et qui aboutissent chacune à un équilibre stable. La métaphore du fil du rasoir est parfois utiliser pour décrire les équilibres instables.

peu plus complexes pour en faire apparaître. Il suffit pour cela de considérer des équations différentielles non linéaires ou d'un ordre supérieur à un. Les propriétés de ces équations peuvent être très utiles à la modélisation, mais nous allons pour l'instant en rester à celles que nous venons d'étudier afin de déterminer la solution du modèle de marché présenté dans la sous-section précédente.

B. Résolution analytique du modèle

Nous avons vu que le modèle permettait de représenter l'évolution du prix du bien comme une équation différentielle linéaire d'ordre un à coefficients constants :

$$\frac{dp}{dt} = -k(\beta + \mu)p_t + k(\alpha + \gamma) \qquad (4.17)$$

Pour la résoudre, on peut soit reprendre la méthode générale de résolution des équations différentielles linéaires, soit procéder par analogie avec le cas général en posant : $a \equiv -k(\beta + \mu)$ et $b = k(\alpha + \gamma)$. Nous allons choisir la deuxième solution par commodité.

On sait donc que la solution générale de l'équation s'écrit de la façon suivante :

$$y = A\mathrm{e}^{at} - \frac{b}{a} \qquad (4.23)$$

On peut donc écrire par analogie :

$$p = A\mathrm{e}^{-k(\beta+\mu)t} - \frac{k(\alpha+\gamma)}{[-k(\beta+\mu)]}$$

$$= A\mathrm{e}^{-k(\beta+\mu)t} + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\mu}$$

$$p = A\mathrm{e}^{-k(\beta+\mu)t} + \bar{p} \qquad (4.27)$$

Pour définir entièrement la dynamique du prix, on doit connaître les conditions initiales, c'est-à-dire le prix initial. On peut alors déterminer la valeur de A.

$$p_0 = A\mathrm{e}^{-k(\beta+\mu)0} + \bar{p}$$

$$= A + \bar{p}$$

$$\Leftrightarrow A = p_0 - \bar{p} \tag{4.28}$$

Le paramètre A mesure donc l'écart entre le prix d'équilibre et le prix initial. Il sera positif si le prix initial est supérieur au prix d'équilibre et négatif sinon.

La solution complète s'écrit alors :

$$p = (p_0 - \bar{p})\mathrm{e}^{-k(\beta+\mu)t} + \bar{p} \tag{4.29}$$

On peut donc retrouver les six configurations habituelles des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants, qui correspondent à autant d'évolutions possibles du prix de marché.

Le marché sera stable si $a = -k(\beta + \mu) < 0$. Cela signifie que le prix croîtra de façon asymptotique vers le prix d'équilibre $\bar{p}$ s'il est initialement inférieur au prix d'équilibre ($p_0 < \bar{p}$). Il décroîtra de façon asymptotique vers ce prix s'il lui est initialement supérieur ($p_0 > \bar{p}$). Si le prix correspond d'emblée au prix d'équilibre ($p_0 = \bar{p}$), il sera constant et retournera vers l'équilibre suite à une perturbation.

Le marché sera en revanche instable si $a = -k(\beta + \mu) > 0$. Cela signifie que le prix tendra vers moins l'infini s'il est initialement inférieur à l'équilibre et vers plus l'infini s'il est initialement supérieur à l'équilibre. S'il est par hasard égal à l'équilibre, il se placera sur une des deux trajectoires divergentes en cas de perturbation.

Pour comprendre ce que ce résultat implique, il faut rappeler ce que mesurent les paramètres k, β et μ. Le premier est un paramètre qui décrit la vitesse d'ajustement du prix. Il est supposé positif. La question est donc de savoir si $(\beta + \mu)$ est positif ou négatif.

Pour mémoire, β et μ mesurent respectivement la sensibilité au prix de la demande et de l'offre. Nous avons supposé que ces deux paramètres étaient positifs, car, sur la plupart des marchés, l'offre est croissante et la demande décroissante. Par conséquent, la condition pour que la solution du modèle soit stable est respectée : $a = -k(\beta + \mu) < 0$.

Nous avons cependant également déjà remarqué que certaines demandes pouvaient être croissantes (biens Giffen et Veblen), de même que certaines offres pouvaient être décroissantes (économies d'échelle externes). β et μ peuvent donc être négatifs. Même si cela ne garantit pas que leur somme soit négative, on ne peut cependant pas exclure a priori que ces marchés soient instables.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié d'un point de vue dynamique le modèle le plus simple qui soit, un modèle de marché en concurrence pure et parfaite. Nous l'avons transformé en un modèle en temps discret en jouant sur les retards de certaines variables, et en un modèle en temps continu en introduisant une équation d'ajustement des prix.

Les deux modélisations donnent des résultats quelque peu différents, et nous n'avons observé d'oscillations que dans le cas discret. Cependant, elles donnent deux enseignements similaires, qui doivent amener à n'utiliser qu'avec précaution les raisonnements en statique comparative.

D’abord, ce n’est pas parce qu’un équilibre existe que le modèle va converger vers cet équilibre. Certaines trajectoires sont divergentes, et certains équilibres sont instables. De plus, même lorsque les trajectoires sont convergences, la convergence peut être lente et non monotone. Il faut donc se méfier des raisonnements intuitifs qui décrivent comment on passe d’un équilibre à l’autre. Pour être rigoureux, ces raisonnements devraient s’appuyer sur une représentation explicite de la dynamique du modèle.

Ensuite, les conditions initiales sont importantes. En effet, surtout lorsque la solution du modèle diverge, l’évolution de la variable considérée peut être totalement différente en fonction de sa valeur initiale. Tant dans le modèle du cobweb que dans le modèle en temps continu, nous avons vu que sur le même marché le prix pouvait augmenter ou diminuer indéfiniment. Il est donc important de considérer non seulement les paramètres structurels d’un modèle mais aussi ses conditions initiales avant de pouvoir décrire sa dynamique. La sensibilité aux conditions initiales peut être un défaut ou une qualité d’un modèle. Ce sera un défaut si on pense que c’est l’équilibre qui décrit le mieux la réalité. Ce sera une qualité si on souhaite souligner les effets persistants de certains phénomènes.

Dans tous les cas, on doit garder à l’esprit que les modèles dynamiques que nous avons étudiés sont extrêmement simples. Nous n’avons en effet considéré que des équations de récurrence ou différentielles linéaires du premier ordre, et à coefficients constants. Or les relations économiques n’ont aucune raison d’être linéaires. Il n’y a de plus pas de raisons de ne considérer qu’un seul retard, ou une relation entre une variable et sa dérivée première. Enfin, les coefficients peuvent eux-mêmes dépendre du temps. En levant ces restrictions, on pourra étudier des dynamiques toujours plus riches.

Références bibliographiques

Chiang, A., et K. Wainwright, *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, Mac Graw Hill, 2005, chapitres 15 et 17.

Renshaw G., *Maths for economists*, Oxford University ress, 2005, chapitre 20.

Simon, C. P., et L. Blume, *Mathématiques pour économistes*, De Boeck, 1998, chapitre 24.

*****